1934 № 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ · EXEMPLE DE CITATION
В. А. Фок. О движении сжимаемой жидкости. ИМЕН, 1934, № 1, стр. 129.
V. Fock. Sur le mouvement d'un liquide compressible. BAS-MN, 1934, № 1, p. 129 (en russe).

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Март 1934 г.

Непременный секретарь академик *В. Волгин*

Технический редактор Л. А. Федоров
Ученый корректор С. С. Чернявский

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ЛУИС АГРИКОЛА БАУЕР (LOUIS AGRICOLA BAUER)

НЕКРОЛОГ

Составлен П. П. Лазаревым

12 апреля 1932 г. скончался член-корреспондент Академии Наук СССР, знаменитый магнитолог Луис Агрикола Бауер, работы которого в области земного магнетизма и атмосферного электричества составляют эпоху в науке.

Л. А. Бауер родился 26 января 1865 г. в Цинциннати, где он и получил среднее и высшее образование, закончив его со званием гражданского инженера (1888). С 1887 г. началась работа Бауера в Coast and Geodetic Survey под руководством выдающихся ученых, причем преимущественное внимание Бауера привлекали вопросы земного магнетизма. Не довольствуясь тем, что могла ему дать Америка, и желая глубже изучить теорию и практику геомагнетизма, Бауер в 1892 г. направился в Германию, где в Берлинском университете он начал старательно изучать математику, астрономию и физику, посещая лекции и работая под руководством Фукса, Бецольда, Ферстера, Гельмгольца, Кундта, Планка. Одновременно он начал практически знакомиться с геомагнитными наблюдениями, посещая в качестве добровольного наблюдателя Потсдамскую геомагнитую обсерваторию. В 1895 г. Бауер защитил в Берлинском университете докторскую диссертацию, посвященную вековым вариациям земного магнетизма. Диссертация открыла Бауеру путь к академической деятельности, и тотчас по возвращении в Америку, в 1895 г., он был приглашен доцентом математической физики в Чикагском университете, а в следующем году он был назначен в том же университете инструктором геофизики. Однако, Бауеру недолго пришлось работать в Чикаго; в 1897 г. он перешел в качестве экстраординарного профессора (assistant professor) в университет Цинциннати. 1896—1899 годы были посвящены практической и организационной работе Бауера по магнитной съемке (в Maryland). В 1899 г. Бауер прочел курс геомагнетизма в университете Джона Гопкинса. Весной 1899 г. Бауер

возвратился в Вашингтон и занял место начальника отдела земного магнетизма в Coast and Geodetic Survey. Пользуясь широкими возможностями, предоставляемыми новой должностью, Бауер придпринял прежде всего создание ряда новых магнитных станций в Соединенных Штатах, необходимых для общей магнитной съемки.

Работы в отделе земного магнетизма потребовали от Бауера не только огромной организационой и административнной работы, но заставили его глубже познакомиться с деталями полевых магнитных работ, причем это знакомство было очень полезно для будущих работ Бауера. В 1904 г., в Вашингтоне, по инициативе и при ближайшем участии Бауера создался новый отдел Института Карнеги, посвященный изучению земного магнетизма. Если работы в Coast and Geodetic Survey поставили перед Бауером задачу изучения геомагнетизма в одной обширной стране, то Институт Карнеги с его отделом земного магнетизма заставил Бауера перейти к организации изучения магнетизма всего земного шара. Несмотря на то, что Институт Карнеги является частной организацией, он имеет международное значение и в его задачи входит, между прочим, помощь исследованиям не только в Соединенных Штатах, но и в других странах мира. В этом же направлении Бауер развивал деятельность отдела земного магнетизма, и нет страны, где в той или другой форме отдел земного магнетизма Института Карнеги не оказал бы своего влияния на развитие работ.

Говоря об организационных работах Бауера, нужно упомянуть, что в 1896 г. Бауер основал журнал, посвященный земному магнетизму и атмосферному электричеству, журнал, сделавшийся вскоре международным органом, привлекшим к сотрудничеству все крупные научные силы.

Говоря о научной деятельности Бауера, нельзя ее отделять от работ руководимого им отдела земного магнетизма Института Карнеги, и мы далее рассмотрим задачи, поставленные и разрешенные Бауером.

Поставив себе прежде всего задачу теоретического истолкования явлений земного магнетизма, Бауер должен был в первую очередь получить обширный и безукоризненный материал, характеризующий магнитное состояние земли.

Около ста лет тому назад великий математик и физик Гаусс предпринял организацию геомагнитных наблюдений на земле. Почин Гаусса встретил отклик в большинстве стран мира, правительства которых отпускали средства на магнитную съемку страны, но до возникновения геомагнитного отдела Института Карнеги поверхность земного шара, заснятая геомагнитно, была так мала, что невозможно было сделать никаких строгих

выводов относительно точного распределения геомагнетизма и вариаций его. Не говоря уже о том, что большая часть земного шара, покрытая океаном, не была изучена в магнитном отношении, континенты в их мало доступных частях (Азия, Африка, Южная Америка, Австралия) были абсолютно не изучены геомагнитно.

С организации работ в этом направлении и начал Бауер свою деятельность в Институте Карнеги, и ряд магнитных обсерваторий, основанных магнитным отделом Института Карнеги, является памятником деятельности Бауера в этом направлении. Любопытно отметить, что личные качества Бауера и его огромный авторитет в области геомагнетизма создали ему возможность совместной работы с обсерваториями, не относящимися прямо к Институту Карнеги и иногда принадлежащими даже другим государствам. Так обстояло дело, напр., с магнитной съемкой в Новой Зеландии (области, непринадлежащей САСШ), когда ее руководители Farr и Skey, будучи официально связаны с обсерваторией в Кью и магнитным комитетом в Кью, вели переписку с Бауером, причем, по их словам, «его симпатии к нашим предположениям давали нам огромную поддержку».[1] Такую же помощь как словами, так и делом, Бауер оказывал всем, к нему обращавшимся.

Нужно, далее, упомянуть о ряде экспедиций, организованных Бауером в Южной Америке, Южной Африке, Австралии, Китае и холодных странах Северной Америки. Для съемки в недоступных частях Южной Америки была построена специальная моторная лодка, доставлявшая по реке наблюдателей в желаемые места. Чтобы смерить магнитные постоянные в африканской пустыне, был снаряжен специальный караван верблюдов, который и проделал путь от Алжира до Тимбукту, позволяя по пути делать магнитные наблюдения. Результаты наблюдений появлялись весьма скоро в печати, часто в течение следующего за экспедицией года, причем все камеральные работы производились в специально построенном в Вашингтоне здании отдела земного магнетизма.

Неизученная геомагнитно область океанов заставила Бауера обратиться к организации наблюдений в этой части земного шара. В 1905 г. Бауер предпринял систематическую магнитную съемку океана, приспособив судно «Галилей» для этих целей. Скоро мало приспособленное судно «Галилей» было заменено немагнитной яхтой Карнеги, специально приспособленной для наблюдений в океане. Трудности были не только в целесообразной

[1] C. Coleridge Farr and Henry Skey. Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity 37, September 1932, p. 213.

постройке судна, необходимо было выработать специальные методы наблюдений, пригодные для работ в океане, и это все было выполнено самым блестящим образом Бауером. В январе 1924 г. мне удалось посетить яхту Карнеги, в сопровождении ее капитана Аульт, трагически погибшего впоследствии (в 1930 г.), при взрыве, разрушившем яхту. Впечатление от этого замечательного сооружения было огромное. Все было предусмотрено, все детали тщательно выработаны и вся яхта представляла вместе со всеми инструментами превосходную плавучую магнитную обсерваторию, могущую работать при любых условиях в океане. В результате многолетних работ Бауера мы в настоящее время знаем достаточно точно распределение магнетизма на океане и это составляет целую эпоху в области геомагнетизма.

Если сравнить то, что сделано в области магнитной съемки земли за весь период со времени работ Гаусса, с тем, что выполнил за короткое время Бауер с сотрудниками, то можно с полным правом сказать, что большая и лучшая половина работы по изучению магнетизма земного шара сделана в Институте Карнеги. Огромный фактический материал, собранный в Институте Карнеги и охватывающий магнитную съемку всего земного шара, являлся бы вполне достаточным, чтобы обессмертить имя автора и руководителя этой колоссальной работы, но Бауер был не только наблюдателем и экспериментатором, он был выдающимся теоретиком, и обработка всего накопленного фактического материала привела его к ряду интереснейших и глубочайших заключений, позволяющих ближе понять и истолковать явления, связанные с магнетизмом земли и его вариациями. Бауер в своих многочисленных работах по земному геомагнитному полю показал, что полное поле можно разложить на 2 поля; на так называемое однородное поле, соответствуюшее однородному намагничиванию земли, и на остаточное поле. Бауер показал, что первое поле, поле однородного намагничивания, изменяется от полюса к экватору под влиянием вращения земли. Делая подсчеты поля для разных эпох, Бауер открыл, что магнитное поле земли не только испытывает уже известные вековые вариации по отношению к оси вращения земли, но что одновременно происходит и уменьшение намагничивания. Повторные вычисления, произведенные Бауером, подтвердили это обстоятельство. Открытие Бауера явилось исходным пунктом для работ ряда ученых (Лазарев, Dehalu и др.), позволившим установить, путем изучения намагничивания минералов и горных пород, величину поля земли в эпоху их образования. Уменьшение намагничивания, происходящее в земле, приводит к двум возможностям. Или земля показы-

вает непрерывное постоянное размагничивание или мы имеем перед собой периодический процесс, порядка вековых изменений. Все работы Бауера, равно как и заключения, сделанные на основании экстраполяций в ближайшие геологические эпохи, приводят к представлению, что природа вековых изменений является периодической, и мы можем следующим образом выразить все законы вековых изменений геомагнетизма (A. Schmidt).[1]

«Вековой ход направления геомагнитной силы в Лондоне, Париже и Капштадте стоит в общих чертах в согласии с гипотезой, что вековая вариация обусловливается равномерным вращением с периодом в 480 лет однородного, магнитного железного ядра».

Изучая магнитное поле земли, Бауер показал, что помимо двух выше указанных полей, связанных с землей, имеется еще одно поле, эквивалентное системе электрических токов, проходящих вертикально через поверхность земли. Вначале он рассматривал эти токи просто как прием исследования, как математическую гипотезу. Но по мере увеличения наблюдений Бауер пришел к убеждению в действительном существовании этих токов. Это обстоятельство делает понятным, почему с течением времени Бауер все более и более заинтересовывался атмосферным электричеством, которое и явилось предметом обстоятельных исследований на суше и на море. В этой области были получены результаты величайшего значения. Таким путем Бауер пришел к исследованию связи атмосферного электричества и геомагнетизма с солнечной деятельностью. Токи, текущие в земле и связанные с магнитными вариациями также вызвали у Бауера огромный интерес, и им посвящен был ряд работ, вышедших из Института Карнеги.

После того, как общая физическая картина земного магнетизма была в общих чертах получена, необходимо было ближе подойти к причинам, вызывающим намагничивания земли (ось вращения делает угол в 11°.5 с направлением намагничения). Это обстоятельство заставило думать, что магнетизм земли зависит от ее вращения. Такая идея руководила П. Н. Лебедевым в его замечательных исследованиях магнетизма вращающихся тел. Результаты Лебедева были отрицательные, и в Институте Бауера были снова предприняты опыты с магнетизмом вращения. Опыты эти не являются до сих пор законченными.

Можно только кратко упомянуть о тех грандиозных проектах дальнейших работ, которые занимали Бауера в последнее время. Еще во время

[1] A. Schmidt. Terrestr. Magnetism, 37, 1932, p. 229.

пребывания моего в Америке (в декабре 1923 г. и январе 1924 г.) Бауер указывал на ограниченность наших знаний о поле земли, если бы даже мы имели идеальную по точности и частоте распределения точек картину земного поля. Наши знания были ограничены только поверхностью земли, и мы совершенно не знаем поля в окружающем землю пространстве. Между тем, этот вопрос представляет огромный интерес для суждения о целом ряде вопросов, связанных с распределением магнитных масс в земле. Бауер предполагал в будущем поставить изучение геомагнетизма на аэропланах или дирижаблях, и тогда можно было бы знать не только поле на поверхности земли, но и в окружающем ее пространстве. В этом направлении однако работ сделано не было, и нужно думать, что достойный преемник Бауера, являющийся его учеником и сотрудником и получивший звание директора отдела земного магнетизма еще при жизни Бауера, доктор Флемминг, осуществит эти начиииания.

Жизнь Бауера является примером жизни ученого, когда внешние факты ее представляют для постороннего человека сравнительно мало интереса и когда все самое интересное и важное сосредоточено в работах. Работы Бауера внесли очень много в сложную область учения о земном магнетизме и атмосферном электричестве, и его имя навсегда будет связано с развитием этого отдела науки.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

СИМВОЛИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ В ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ К ИССЛЕДОВАНИЮ РЕЗОНАНСА В ЭЛЕКТРОННОМ ГЕНЕРАТОРЕ

Н. М. КРЫЛОВА и Н. Н. БОГОЛЮБОВА

Введение

За последнее десятилетие проблемы нелинейных колебаний в радиотехнике, и в частности проблемы нелинейного резонанса, привлекли к себе большое внимание и обусловили появление значительного количества статей, трактующих эти важные вопросы математической физики.

Надлежит однако отметить, что в большинстве появившихся работ по этому поводу была допускаема излишняя схематизация проблемы, в силу чего математически вопрос приводился к интеграции дифференциального уравнения второго порядка вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \rho f\left(\frac{dx}{dt}\right) + \omega^2 x = E \sin \alpha t. \tag{1}$$

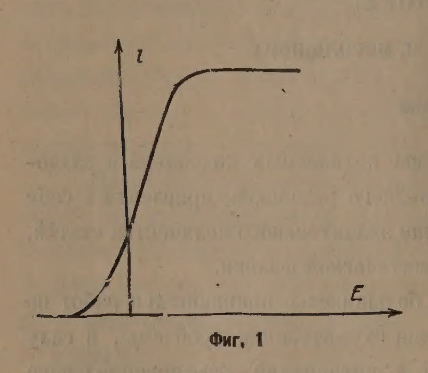
Для изучения такого уравнения функция $f\left(\frac{dx}{dt}\right)$ обычно заменяется полиномом пятой или третьей степени и уже после этой замены уравнение (1) становится предметом математического исследования.

Для практических расчетов инженеры применяют однако преимущественно так называемую квазилинейную, ибо, во-первых, не всегда допустима схематизация, сводящая проблему к интеграции уравнения (1), а, во-вторых, замена характеристики полиномом сильно ограничивает рабочий участок, так как при большом рабочем участке характеристика, вообще говоря, имеет вид, изображенный на фиг. 1, а потому плохо приближается полиномами.

Приложение квазилинейной теории, разработанной главным образом представителями школы Баркгаузена-Меллера, хотя и не требует ни излишней схематизации, ни полиномиальной замены характеристики (характе-

ристика может быть задана графически), но все же очевидно не может, по крайней мере в ее настоящем виде, вполне заменить нелинейную теорию, тем более, что эта последняя применима к исследованию ряда таких «тонких эффектов», к исследованию которых квазилинейная теория не прилагается.

Принимая все это во внимание, авторы настоящей статьи разработали новый символический метод, являющийся надлежащим распространением Операционного исчисления Гивизайда на нелинейные проблемы, причем метод этот, будучи по существу методом нелинейной теории, тем не менее сохраняет все практические достоинства квазилинейной теории.



Фиг. 1

Это распространение было выполнено при помощи методов Нелинейной Механики, установленных авторами, и некоторые результаты, полученные в этом направлении, были частью резюмированы в их статье «Основные проблемы Нелинейной Механики» ИМЕН, 1933, №4, стр. 475.

Упомянутый новый символический метод акад. Н. М. Крылова и д-ра Н. Н. Боголюбова, как далее будет установлено, дает в первом приближении результаты, соприкасающиеся с результатами квазилинейной теории. С другой стороны, являясь методом Нелинейной Механики, он может быть приложен к изучению наиболее сложных и тонких проблем теории резонанса.

Таким образом предлагаемый вниманию читателя новый символический метод является как бы мостом между «нелинейной теорией» и практическими расчетами, основанными на квазилинейной теории.

§ 1. Некоторые предварительные замечания. Символические уравнения работы электронного генератора

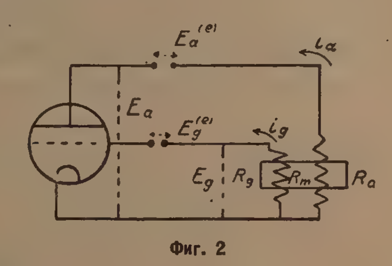
Рассмотрим в качестве примера некоторый электронный генератор, единственным нелинейным элементом которого будет трехэлектродная лампа. Такой генератор очевидно всегда может быть представлен при помощи эквивалентной схемы (фиг. 2) в виде линейного контура с тремя выводными концами, присоединенными соответственно к аноду, сетке и катоду лампы. При этом всегда можно предполагать, что через выводные концы протекают исключительно электронные токи, так как внутриламповые емкости

всегда могут быть отнесены к линейному контуру (подробнее об этом см. в ныне печатающейся монографии авторов «Методы Нелинейной Механики в их приложении к Радиотехнике», ч. I, Москва, ГТТИ).

Таким образом, обозначая через E_a и E_g напряжения на аноде и сетке, имеем, как известно

$$i_a = f_a(E_a, E_g), \quad i_g = f_g(E_a, E_g), \tag{2}$$

где i_a, i_g — анодный и сеточный токи, $f_a(E_a, E_g)$, $f_g(E_a, E_g)$ — так называемые статические характеристики лампы, которые обычно задаются графически.



Фиг. 2

При этом в обычных рабочих условиях имеет место также следующее соотношение:

$$i_a + i_g = f(E_r), \tag{3}$$

где $E_r = E_g + DE_a$ — управляющее напряжение, D — проницаемость.

С другой стороны, на основании законов Кирхгофа линейный контур генератора может быть характеризован тремя символическими импедансами

$$R_a(j\omega), \; R_g(j\omega), \; R_m(j\omega); \;\; \omega = -j\frac{d}{dt},$$

а потому, обозначив через $E_a^{(e)}$, $E_g^{(e)}$ напряжения, получаемые из «внешнего» источника, имеем:

$$\begin{aligned} E_a &= E_a^{(e)} - R_a i_a + R_m i_g, \\ E_g &= E_g^{(e)} - R_g i_g + R_m i_a. \end{aligned} \tag{4}$$

Символические импедансы являются рациональными функциями оператора ω; их образование в каждом конкретном случае не представляет никаких затруднений и выполняется обычными в электротехнике приемами (см. напр. цитированную монографию авторов).

Уравнения (4), (2) и будут общими символическими уравнениями работы генератора.

В настоящей статье ограничимся рассмотрением того практически особо-важного случая, когда сеточным током можно пренебречь

$$i_g = 0.$$

Тогда из (3) и (4) получим

$$
\begin{aligned}
E_a &= E_a^{(e)} - R_a f(E_g + DE_a) \\
E_g &= E_g^{(e)} + R_m f(E_g + DE_a).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Введем следующие обозначения

$$E_g^{(e)} + DE_a^{(e)} = E \text{ (внешнее управляющее напряжение)}$$

$$E_g + DE_a - E = u \text{ (внутреннее управляющее напряжение)}$$

$$\frac{R_m}{R_a} = K \text{ (фактор обратной связи)}$$

$$R_m - DR_a = (K - D)\, R_a = R \text{ (управляющий импеданс).}$$

Из (5) имеем очевидно

$$(E_g - E_g^{(e)}) = -K(E_a - E_a^{(e)})$$

и, комбинируя это соотношение с равенством

$$(E_g - E_g^{(e)}) + D(E_a - E_a^{(e)}) = u,$$

получим непосредственно

$$E_a = E_a^{(e)} - \frac{1}{K-D}\, u, \quad E_g = E_g^{(e)} + \frac{K}{K-D}\, u. \tag{6}$$

Отсюда на основании (5) имеем следующее символическое уравнение

$$u = R(j\omega)\, f(E + u), \tag{7}$$

которое и позволит нам определить u как функцию времени t. По определении из (7) вышеустановленные формулы (6) позволят уже немедленно вычислить анодное и сеточное напряжение и тем решить поставленную задачу.

Для преобразования уравнения (7) целесообразно ввести в рассмотрение обратную величину

$$\sigma(j\omega) = \frac{1}{R(j\omega)}, \tag{8}$$

которую будем называть управляющим адмиттансом и, разлагая которую на активную и реактивную слагающие

$$\sigma(j\omega) = \xi(\omega) + j\eta(\omega)$$

(совершенно ясно, что $\xi(\omega)$ будет четной, а $\eta(\omega)$ нечетной функциями ω), замечаем, что на основании определения (8) символическое уравнение (7) может быть представлено в следующей форме:

$$\{\xi(\omega)+j\eta(\omega)\}u=f(E+u) \tag{9}$$

Прежде чем применять к основному символическому уравнению (9) методы Нелинейной Механики, введем предварительно некоторые ограничительные условия, использованные в дальнейшем. Таким образом в настоящей статье будут рассматриваться электронные генераторы только Томсоновского типа, в которых омическими сопротивлениями можно пренебрегать по сравнению с индуктивными. Надлежит заметить, что электронные генераторы, обычно применяемые в радиотехнике, принадлежат именно к Томсоновскому типу. Электронные генераторы релаксационного типа меньше распространены и имеют более специальное поле приложений.

С математической точки зрения исследование релаксационных систем значительно отличается от исследования систем Томсоновского типа и было выполнено акад. Н. М. Крыловым и д-ром Н. Н. Боголюбовым при помощи совершенно особых методов, изложенных в монографии: «Methodes Nouvelles de la Mécanique non Linéaire dans leur application à l'étude de la perturbation des mouvements périodiques et de divers phénomènes de résonnance s'y rapportant» (Chap. I-er). (Sous presse).

Итак, ограничиваясь в данной статье системами Томсоновского типа, можем положить

$$\xi(\omega)=\rho x(\omega), \tag{10}$$

где ρ некоторый малый параметр.

При изложении метода, которым мы здесь будем пользоваться, предположим для простоты, что функция $\eta(\omega)$ имеет лишь один вещественный положительный корень ω^* и потому

$$\eta(\omega)=(\omega^2-\overset{*}{\omega}{}^2)\zeta(\omega), \tag{11}$$

где $\zeta(\omega)$ не имеет вещественных корней.

В силу сделанного предположения в линейном контуре генератора имеется лишь один резонанс и одна собственная частота.

В некоторых случаях однако существует несколько собственных частот (напр. если в генераторе имеются два сильно связанных колебательных контура); распространение излагаемого метода и получаемых результатов на эти случаи не представляет очевидно никаких существенных затруднений.

Возвращаясь теперь к уравнению (9), обозначим через $r(\omega)$ активную составляющую управляющего импеданса. Тогда очевидно

(12) $$r(\omega^*) = \frac{1}{\xi(\omega^*)}$$

и потому, полагая

(13) $$r(\omega^*) f(r) = F(z),$$

получаем из (9), (10), (11) следующее символическое уравнение

(14) $$(\omega^2 - \overset{*}{\omega}{}^2) u = j\rho\gamma(\omega)\{x(\omega) u - x^* F(E + u)\},$$

где

(15) $$\gamma(\omega) = \frac{1}{\zeta(\omega)}, \quad x^* = x(\omega^*),$$

причем на основании (10), (11) убеждаемся, что $x(\omega)$ будет четной, а $\gamma(\omega)$ нечетной функцией ω.

Прежде чем приступить к детализации методов приближенного решения для символического уравнения (14), сделаем здесь ряд предварительных замечаний относительно интерпретации символических выражений.

Так например, по самому определению символа ω имеем очевидно:

$$\{\alpha_0 + \alpha_1 \omega^2 + \ldots + \alpha_q \omega^{2q}\} \frac{\sin}{\cos} \lambda t = \{\alpha_0 + \alpha_1 \lambda^2 + \ldots + \alpha_q \lambda^{2q}\} \frac{\sin}{\cos} \lambda t,$$

$$j\{\beta_1 \omega + \beta_2 \omega^3 + \ldots + \beta_q \omega^{2q-1}\} \frac{\sin}{\cos} \lambda t =$$

$$= \pm \{\beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^3 + \ldots + \beta_q \lambda^{2q-1}\} \frac{\cos}{\sin} \lambda t.$$

Следовательно вообще можно положить:

(16) $$A(\omega) \frac{\sin}{\cos} \lambda t = A(\lambda) \frac{\sin}{\cos} \lambda t$$
$$jB(\omega) \frac{\sin}{\cos} \lambda t = \pm B(\lambda) \frac{\cos}{\sin} \lambda t,$$

где $A(\omega)$ и $B(\omega)$ — соответственно четная и нечетная функции ω, регулярные на всей вещественной оси.

Рассмотрим теперь символическое выражение вида

(17) $$y(t) = \frac{1}{\omega^2 - \overset{*}{\omega}{}^2} f(t),$$

где $f(t)$ некоторая периодическая функция, заданная разложением Фурье:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n). \tag{18}$$

Тогда, так как интерпретация выражения (17) по существу эквивалентна интеграции простого дифференциального уравнения 2-го порядка (с постоянными коэффициентами в левой части уравнения):

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = -f(t),$$

то при помощи обычного рассуждения получаем

$$y(t) = \sum_{n \neq 1} \frac{f_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)}{(n^2 - 1)\,\omega_0^2} - f_1 \frac{t}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + x \cos(\omega_0 t + \varphi), \tag{19}$$

где x, φ — произвольные постоянные.

Отсюда очевидно вытекает, что функция $y(t)$ не будет вообще периодической, ибо выражение (19) содержит так называемый секулярный член, в котором время t выходит за знак синуса.

Поэтому необходимое и достаточное условие, для того чтобы функция $y(t)$ была периодической, состоит в требовании отсутствия указанного секулярного члена, что в свою очередь дает

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f(t) \cos \omega_0 t \, dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f(t) \sin \omega_0 t \, dt = 0 \tag{20}$$

Итак равенства (20) представляют необходимое и достаточное условие для того, чтобы в выражении (17) функция $y(t)$ была периодической вместе с $f(t)$.

Эти условия будут широко использованы в дальнейшем. Сказанного относительно интерпретации символических выражений совершенно достаточно для понимания вычислений, которые будут детализированы в настоящей статье.

§ 2. Общие методы приближенного решения основного символического уравнения

Приступим теперь к изложению методов Нелинейной Механики для решения символического уравнения (14).

Имея в виду практические приложения к приемникам, нелинейным фильтрам и т. п., берем фигурирующее в рассматриваемом уравнении выражение внешнего (приложенного) управляющего напряжения в виде

(21) $$E = E_0 + F\cos\alpha t,$$

где E_0 — постоянное напряжение, подаваемое источниками постоянного тока, находящимися в цепях сетки и анода.

Как об этом уже упомянуто в заглавии, в настоящей статье будут исследоваться электронные генераторы, находящиеся в условиях резонанса. В наших предыдущих статьях мы неоднократно указывали, что явления резонанса вообще имеют место при приблизительном совпадении «линейной собственной частоты» ω^* с одной из «синхронных частот»

$$^m/_n\alpha;\ m = 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots,$$

причем практически наиболее важными будут резонансы при $m = 1$. Их рассмотрением мы и ограничимся, тем более, что соответствующие обобщения не представляют никаких затруднений.

Итак перейдем к решению уравнения (14) при условии приблизительного совпадения линейной собственной частоты с унтертоном частоты возбуждения.

(22) $$\omega^* \sim \frac{\alpha}{n},\quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Для этого будем определять такую функцию:

(23) $$v = v(t, \tau, \rho)$$

аргументов t и τ, зависящую также от параметра ρ, чтобы выражение

(24) $$u(t) = v(t, \tau, \rho)$$

при $\tau = \rho t$, удовлетворяло уравнению (14).

Замечаем прежде всего, что тождественно имеет место соотношение:

$$\frac{d}{dt}v(t, \rho t, \rho) = \left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \rho\frac{\partial}{\partial \tau}\right)v(t, \tau, \rho)\right\}_{\tau=\rho t}$$

или, в символической форме:

$$\omega\{v(t, \rho t, \rho)\} = \{\omega_c v(t, \tau, \rho)\}_{\tau=\rho t},$$

где

(25) $$\omega_c = \omega_t = j\rho p$$

(26) $$\omega_t = -j\frac{\partial}{\partial t},\quad p = \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Поэтому, если функция (23) удовлетворяет уравнению

$$(27)\qquad (\omega_c^2 - \overset{*}{\omega}{}^2)\,v = j\rho\gamma(\omega_c)\{x(\omega_c)\,v - x^* F(E+v)\},$$

то выражение (24) при $\tau = \rho t$ будет действительно решением уравнения (14).

Полагаем теперь в (27)

$$(28)\qquad \overset{*}{\omega}{}^2 = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 + \rho\nu_1 + \rho^2\nu_2 + \ldots,$$

где $\nu_1, \nu_2 \ldots$ некоторые постоянные коэффициенты. Имеем тогда

$$(29)\quad (\omega_c^2 - \omega_0^2)\,v = j\rho\gamma(\omega_c)\{x(\omega_c)\,v - x^* F(E+v)\} + \rho(\nu_1 + \rho\nu_2 + \ldots)\,v,$$

причем для сокращения введено следующее обозначение

$$(30)\qquad \omega_0 = \frac{\alpha}{n}.$$

Таким образом проблема решения символического уравнения (14), соответствующего некоторому дифференциальному уравнению в обычных производных, приведена нами к проблеме решения уравнения (29), соответствующего дифференциальному уравнению в частных производных.

Будем искать решение символического уравнения (29) в виде степенного ряда, расположенного по степеням малого параметра ρ:

$$(31)\qquad v(t, \tau, \rho) = v_0(t, \tau) + \rho v_1(t, \tau) + \rho^2 v_2(t, \tau) + \ldots,$$

причем определение коэффициентов этого ряда проведем таким образом, чтобы они оказались периодическими по отношению к переменной t.

Заметим предварительно, что на основании (25) имеют место следующие соотношения

$$(32)\quad \begin{aligned} &(\omega_c^2 - \omega_0^2) = (\omega_t^2 - \omega_0^2) - 2j\omega_t p\rho - p^2\rho^2 \\ &(\omega_c^2 - \omega_0^2)\,v = (\omega_t^2 - \omega_0^2)\,v_0 + \rho\,[(\omega_t^2 - \omega_0^2)\,v_1 - 2j\omega_t p v_0] + \\ &\quad + \rho^2\,[(\omega_t^2 - \omega_0^2)\,v_2 - 2j\omega_t p v_1 - p^2 v_0], \end{aligned}$$

Но, кроме того

$$\begin{aligned} j\gamma(\omega_c)\,x(\omega_c) &= j\gamma(\omega_t)\,x(\omega_t) + \rho\{x'(\omega_t)\,\gamma(\omega_t) + x(\omega_t)\,\gamma'(\omega_t)\}\,p + \ldots \\ j\gamma(\omega_c) &= j\gamma(\omega_t) + \rho\gamma'(\omega_t)\,p + \ldots \\ F(E+v) &= F(E+v_0) + \rho F'(E+v_0)\,v_1 + \ldots, \end{aligned}$$

и потому

$$(33)\quad \begin{aligned} &j\rho\gamma(\omega_c)\{x(\omega_c)\,v - x^* F(E+v)\} + \rho\{\nu_1 + \rho\nu_2 + \ldots\}\,v = \\ &= \rho\{j\gamma(\omega_t)\,[x(\omega_t)\,v_0 + x^* F(E+v_0)] + \nu_1 v_0\} + \rho^2\{j\gamma(\omega_t)\,[x(\omega_t)\,v_1 - \\ &\quad - x^* F'(E+v_0)\,v_1] - \nu_1 v_1 + \nu_2 v_0 + [\gamma'(\omega_t)\,x(\omega_t) + \\ &\quad + x'(\omega_t)\,\gamma(\omega_t)]\,p v_0 + x^*\gamma'(\omega_t)\,p F(E+v_0)\} + \ldots \end{aligned}$$

Приравнивая теперь в только что полученных равенствах (32), (33) коэффициенты при одинаковых степенях параметра ρ в правых частях, получаем нижеследующие символические уравнения для определения коэффициентов разложения (31):

$$(34)\begin{cases}(34_0) & (\omega_t^2-\omega_0^2)v_0=0\\ (34_1) & (\omega_t^2-\omega_0^2)v_1=f_1(t,\tau)=j\gamma(\omega_t)[x(\omega_t)v_0-x^*F(E+v_0)]+\\ & +\nu_1 v_0+2j\omega_t p v_0\\ (34_2) & (\omega_t^2-\omega_0^2)v_2=f_2(t,\tau)=j\gamma(\omega_t)[x(\omega_t)v_1-x^*F'(E+v_0)v_1]+\\ & +2j\omega_t p v_1+p^2v_0+\nu_1v_1+\nu_2v_0+x^*\gamma'(\omega_t)pF(E+v_0)-\\ & -[\gamma'(\omega_t)x(\omega_t)+\gamma(\omega_t)x'(\omega_t)]pv_0\\ \ldots & \ldots\end{cases}$$

Из первого уравнения (34) имеем очевидно:

$$v_0=A\cos(\omega_0 t+\varphi), \tag{35}$$

где A и φ — некоторые произвольные постоянные по отношению к t, но зависящие вообще от τ.

Ясно поэтому, что $f_1(t,\tau)$ будет периодической функцией t с частотой ω_0. Пользуясь замечанием, сделанным в конце предыдущего параграфа, раскроем условия:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f_1(t,\tau)\cos\omega_0 t\,dt=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f_2(t,\tau)\sin\omega_0 t\,dt=0,$$

которые, как мы видели, являются необходимыми и достаточными условиями для периодичности v_1 по отношению к t.

Получаем (совершая под знаком интеграла замену переменной по формуле $w=\omega_0 t+\varphi$):

$$\begin{aligned}0=\frac{\omega_0}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f_1(t,\tau)\cos(\omega_0 t+\varphi)\,dt=\\ =\nu_1 A-2A\omega_0\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}-\gamma(\omega_0)x^*F_2(A,\varphi),\end{aligned} \tag{36}$$

(37)
$$0 = \frac{\omega_0}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f_2(t, \tau) \sin(\omega_0 t + \varphi)\, dt =$$
$$= -2\omega_0 \frac{\partial A}{\partial \tau} - \gamma(\omega_0) x(\omega_0) A + \gamma(\omega_0) x^* F_1(A, \varphi),$$

где

$$F_1(A, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F\{E_0 + F\cos n(w - \varphi) + A\cos w\} \cos w dw$$

(38)
$$F_2(A, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F\{E_0 + F\cos n(w - \varphi) + A\cos w\} \sin w dw.$$

С другой стороны,[1] применяя разложение Фурье, имеем:

$$F(E + v_0) = F(E_0 + F\cos n\omega_0 t + A\cos(\omega_0 t + \varphi)] =$$
$$= F_{1,0}(A, \varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} \{F_{1,k}(A, \varphi) \cos k(\omega_0 t + \varphi) + F_{2,k}(A, \varphi) \sin k(\omega_0 t + \varphi)\},$$

причем

$$F_{1,k}(A, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(E_0 + F\cos n(w - \varphi) + A\cos w) \cos kw dw,$$

$$F_{2,k}(A, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(E_0 + F\cos n(w - \varphi) + A\cos w) \sin kw dw \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$F_{1,0}(A, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(E_0 + F\cos n(w - \varphi) + A\cos w)\, dw.$$

Принимая поэтому во внимание уравнения (36), (37), обусловливающие отсутствие секулярного члена в выражении $v_1(t, \tau)$, убеждаемся из соотношения (34), что

(39)
$$v_1(t, \tau) = X\cos(\omega_0 t + \varphi) + Y\sin(\omega_0 t + \varphi) + v_1^*(\omega_0 t + \varphi, \tau),$$

где

$$v_1^*(w, \tau) = -\frac{F_{1,0}}{\omega_0^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\{F_{1,k} \cos kw + F_{2,k} \sin kw\}}{(k^2 - 1)\,\omega_0^2},$$

и где X, Y — произвольные постоянные по отношению к t, зависящие вообще от τ.

[1] Далее приводимое изложение, начиная с этого момента, в части, относящейся к получению второго и следующих приближений, может быть опущено читателем, интересующимся вопросом лишь с точки зрения технических приложений.

Рассмотрим теперь уравнение (34), в правую часть которого подставим вышеустановленные выражения (35), (39) для v_0, v_1.

Тогда, раскрывая условия периодичности функции $v_2(t, \tau)$ (по отношению к t), получим после некоторых вычислений:

$$(40)\quad \begin{cases} 2\omega_0 \dfrac{\partial X}{\partial \tau} + \gamma(\omega_0)\, x(\omega_0)\, X - \\ \quad - \left(\nu_1 - 2\omega_0 \dfrac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right) Y - \gamma(\omega_0)\, x^* (A_{11} + A_{12} Y) = \Phi_1, \\ 2\omega_0 \dfrac{\partial Y}{\partial \tau} + \gamma(\omega_0)\, x(\omega_0)\, Y + \\ \quad + \left(\nu_1 - 2\omega_0 \dfrac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right) X - \gamma(\omega_0)\, x^* (A_{21} X + A_{22} Y) = \Phi_2, \end{cases}$$

$$(41)\quad \begin{cases} \Phi_1 = \gamma(\omega_0)\, x^* P - \left\{2 \dfrac{\partial A}{\partial \tau} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \tau} + A \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2}\right\} - \left[\dfrac{\partial \gamma(\omega)\, x(\omega)}{\partial \omega}\right]_{\omega=\omega_0} A \dfrac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \\ \quad - x^* \gamma'(\omega_0) \dfrac{\partial F_2(A, \varphi)}{\partial \tau} + \gamma'(\omega_0)\, x^* \dfrac{\partial \varphi}{\partial \tau} F_1(A, \varphi). \\ \Phi_2 = -\nu_2 A + \gamma(\omega_0)\, x^* Q - \left\{\dfrac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} - A\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)^2\right\} - \\ \quad - \left[\dfrac{\partial \gamma(\omega)\, x(\omega)}{\partial \omega}\right]_{\omega=\omega_0} \dfrac{\partial A}{\partial \tau} + x^* \gamma'(\omega_0) \dfrac{\partial F_1(A, \varphi)}{\partial \tau} + x^* \gamma'(\omega_0) \dfrac{\partial \varphi}{\partial \tau} F_2(A, \varphi), \end{cases}$$

где

$$(42)\quad \begin{cases} P = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} v_1^*(w, \tau)\, F_u'\,[E_0 + E \cos n(w - \varphi) + A \cos w] \cos w \, dw \\ Q = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} v_1^*(w, \tau)\, F_u'\,[E_0 + F \cos n(w - \varphi) + A \cos w] \sin w \, dw \\ A_{11} = \dfrac{\partial F_1(A, \varphi)}{\partial A}, \quad A_{12} = \dfrac{\partial F_2(A, \varphi)}{\partial A}, \quad A_{22} = \dfrac{1}{A}\left(F_1 - \dfrac{\partial F_2}{\partial \varphi}\right). \end{cases}$$

Продолжая далее настоящее рассуждение получим для r-го члена ряда (31):

$$(43)\quad v_r(t, \tau) = X_r \cos(\omega_0 t + \varphi) + Y_r \sin(\omega_0 t + \varphi) + v_r^*(\omega_0 t + \varphi, \tau),$$

где $v_r^*(w, \tau)$ некоторая определенная периодическая функция (с периодом 2π) переменной w, X_r, Y_r — независящие от t функции переменной r,

удовлетворяющие уравнениям, отличающимся от (40) лишь свободными членами.

Легко показать, что эти уравнения решаются в квадратурах, как только мы имеем общее решение уравнений (36), (37).

Пусть в самом деле выражения

$$A = A(t, c_1, c_2); \quad \varphi = \varphi(\tau, c_1, c_2),$$

где c_1 и c_2 произвольные постоянные интеграции, являются общим решением уравнений (36), (37).

Тогда при помощи дифференцирования этих уравнений по параметрам c_1, c_2 убеждаемся, что функции

$$(44) \qquad \begin{aligned} X_\alpha &= \frac{\partial A}{\partial c_1}, \quad Y_\alpha = -A\frac{\partial \varphi}{\partial c_1}; \\ X_\beta &= \frac{\partial A}{\partial c_2}, \quad Y_\beta = -A\frac{\partial \varphi}{\partial c_2}; \end{aligned}$$

образуют полную систему решений линейных однородных уравнений

$$(45) \qquad \left\{ \begin{aligned} & 2\omega_0 \frac{\partial X}{\partial \tau} + \gamma(\omega_0) x(\omega_0) X - \\ & -\left(\nu_1 - 2\omega_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right) Y - \gamma(\omega_0) x^*(A_{11} X + A_{12} Y) = 0, \\ & 2\omega_0 \frac{\partial Y}{\partial \tau} + \gamma(\omega_0) x(\omega_0) Y + \\ & +\left(\nu_1 - 2\omega_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right) X - \gamma(\omega_0) x^*(A_{12} X + A_{22} Y) = 0, \end{aligned} \right.$$

соответствующих неоднородным, которым удовлетворяют X_r, Y_r.

Обозначив свободные члены этих последних уравнений соответственно через $\Phi_1^{(r)}$, $\Phi_2^{(r)}$, имеем на основании классических формул

$$(46) \qquad \begin{aligned} X_r &= X_\alpha \int^\tau \frac{\Phi_1^{(r)} Y_\beta - \Phi_2^{(r)} X_\beta}{X_\alpha Y_\beta - X_\beta Y_\alpha} d\tau - X_\beta \int^\tau \frac{\Phi_1^{(r)} Y_\alpha - \Phi_2^{(r)} X_\alpha}{X_\alpha Y_\beta - X_\beta Y_\alpha} d\tau, \\ Y_r &= Y_\alpha \int^\tau \frac{\Phi_1^{(r)} Y_\beta - \Phi_2^{(r)} X_\beta}{X_\alpha Y_\beta - X_\beta Y_\alpha} d\tau - Y_\beta \int^\tau \frac{\Phi_1^{(r)} Y_\alpha - \Phi_2^{(r)} X_\alpha}{X_\alpha Y_\beta - X_\beta Y_\alpha} d\tau. \end{aligned}$$

Итак, резюмируя все вышесказанное, мы видим, что при помощи только что изложенного приема можно определить любое количество членов ряда (31), которые все окажутся периодическими функциями аргумента t

с частотою ω_0. При этом для полного определения каждого члена указанного ряда необходимо решить некоторую систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений, которая интегрируется в квадратурах как только образовано решение «уравнений первого приближения» (36), (37).

В настоящей статье мы ограничимся анализом первого приближения, которое обычно является вполне достаточным для практических приложений.

Имеем следовательно из (24), (31), (35)

$$u = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \tag{47}$$

причем в выражениях A и φ, как функций τ, подставлено $\tau = \rho t$.

Поэтому на основании (36), (37) мы видим, что амплитуда A и фаза φ внутреннего управляющего напряжения u, являющиеся вообще «медленно изменяющимися» функциями времени, удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} 2\omega_0 \frac{\partial A}{dt} &= \rho\gamma(\omega_0)x^* F_1(A, \varphi) - \rho\gamma(\omega_0)x(\omega_0)A \\ 2\omega_0 \frac{\partial \varphi}{dt} A &= \rho\nu_1 A + \rho\gamma(\omega_0)x^* F_2(A, \varphi). \end{aligned} \tag{48}$$

С другой стороны, останавливаясь в разложении (28) на втором члене, получим непосредственно:

$$\rho\nu_1 = \overset{*}{\omega}{}^2 - \omega_0^2 = \overset{*}{\omega}{}^2 - \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2. \tag{49}$$

Положим теперь, что электронная лампа выключена. Тогда очевидно тождественно

$$F_1(A, \varphi) = F_2(A, \varphi) = 0,$$

и уравнения (48) дают

$$A = A_0 e^{-\frac{\rho\gamma(\omega_0)x(\omega_0)}{2\omega_0}t}. \tag{50}$$

Но, при выключенной лампе, генератор приводится к своему линейному контуру и потому собственные колебания будут затухать согласно формуле

$$A = A_0 e^{-\frac{\delta\omega_0}{2\pi}t}, \tag{51}$$

где δ — логарифмический декремент линейного контура.

Сравнивая выражения (50), (51) получаем

$$\rho\gamma(\omega_0)x(\omega_0) = \frac{\delta\omega_0^2}{\pi}. \tag{52}$$

С другой стороны на основании (10), (12) видим, что

$$\rho x^* r(\omega^*) = 1.$$

Таким образом, принимая во внимание все вышесказанное, убеждаемся, что в первом приближении внутреннее управляющее напряжение задается выражением

$$u = A \cos \frac{\alpha t + \theta}{n}, \tag{53}$$

амплитуда A и фаза θ которого должны быть определены из уравнений:

$$(54) \quad \begin{cases} (54_1) \quad \dfrac{2\pi}{\delta\omega_0} \dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{\xi(\omega_0)} f_1(A, \theta) - A \\ (54_2) \quad \dfrac{2\pi}{\delta\omega_0} A \dfrac{d\theta}{dt} = n \dfrac{\eta(\omega_0)}{\xi(\omega_0)} A - \dfrac{n}{\xi(\omega_0)} f_2(A, \theta); \end{cases}$$

где

$$(55) \quad \begin{cases} f_1(A, \theta) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(E_0 + F\cos(nw - \theta) + A\cos w) \cos w \, dw \\ f_2(A, \theta) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(E_0 + F\cos(nw - \theta) + A\cos w) \sin w \, dw \end{cases}$$

§ 3. Исследование точного резонанса

Уравнения (54), установленные в предыдущем параграфе, вместе с формулой (53), и представляют надлежащее основание для построения полной теории резонанса.

В настоящей статье особое внимание будет обращено на случай «точного резонанса» (при отсутствии расстройки)

$$\overset{*}{\omega} = \frac{\alpha}{n},$$

в котором характер уравнений (54) выявляется наиболее простым и наглядным образом.

Введем для этого в рассмотрение следующую величину

$$U(A, \theta) = -\frac{1}{\pi\xi(\omega_0)} \int_0^{2\pi} \overline{f}(E_0 + F\cos(nw - \theta) + A\cos w)\, dw + \frac{1}{2} A^2, \tag{56}$$

где

$$\bar{f}(E) = \int_0^E f(E)\,dE$$

и заметим, что при точном резонансе уравнения (54) могут быть приведены к следующей форме:

$$\frac{2\pi}{\delta\omega_0}\frac{dA}{dt} = -\frac{\partial U(A, \theta)}{\partial A}; \quad \frac{2\pi}{\delta\omega_0}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{n^2}{A^2}\frac{\partial U(A, \theta)}{\partial \theta}. \tag{57}$$

Чтобы придать решению наглядный характер, условимся представлять A и θ/n, как полярные координаты некоторой точки на плоскости (A — радиус вектор, θ/n — угловая координата).

Тогда, переходя к декартовым координатам

$$A\cos\theta/n = x, \;\; A\sin\theta/n = y,$$

можно преобразовать уравнения (57) к виду

$$\frac{2\pi}{\delta\omega_0}\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad \frac{2\pi}{\delta\omega_0}\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial y},$$

из которого непосредственно убеждаемся, что точка (x, y) будет двигаться по так называемой линии наибольшего ската функции U. Движение по линии наибольшего ската можно механически представить как безинерционное движение материальной точки, находящейся на поверхности

$$z = U$$

(направление оси z противоположно направлению силы тяжести) и вызываемое силой тяжести и силами трения пропорциональными скорости.

В течение такого движения функция U все время убывает

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} = -\frac{2\pi}{\delta\omega_0}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\},$$

и точка (x, y) асимптотически приближается к точке, реализующей минимум функции U.

Итак, в случае точного резонанса, произвольное колебание

$$u = A\cos\frac{\alpha t + \theta}{n}$$

приближается асимптотически к стационарному, амплитуда и фаза которого определяется из уравнений:

(58) $$0 = \frac{\partial U}{\partial A} = A - \frac{1}{\xi(\omega_0)} f_1(A, \theta);$$

(59) $$0 = \frac{n}{A}\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{1}{\xi(\omega_0)} f_2(A, \theta).$$

Из всей совокупности корней уравнений (58), (59) должны быть при этом приняты во внимание лишь такие, которые соответствуют минимуму функции $U(A, \theta)$.

Нетрудно убедиться, что это последнее условие минимума есть не что иное, как условие устойчивости стационарных режимов.

На основании формул (55) совершенно очевидно, что имеют место следующие тождества

$$f_2(A, 0) = f_2(A, \pi) = 0.$$

Таким образом уравнению (59) мы удовлетворим, положив

$$\theta = 0, \quad \text{или} \quad \theta = \pi.$$

Замечая, что с другой стороны:

$$\frac{\partial^2 U(A, \theta)}{\partial \theta^2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{AF}{n\xi(\omega_0)} \cdot \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi f'(E_0 + F\cos nw + A\cos w)\sin nw \sin w dw, & \text{при } \theta = 0 \\ \dfrac{-AF}{n\xi(\omega_0)} \cdot \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi f'(E_0 - F\cos nw + A\cos w)\sin nw \sin w dw, & \text{при } \theta = \pi \end{cases}$$

мы должны рассматривать из этих двух корней тот, для которого

$$\pm \int_0^\pi f'(E_0 \pm F\cos nw + A\cos w)\sin nw \sin w dw > 0,$$

знак + берем для $\theta = 0$, знак — для $\theta = \pi$

Возьмем, чтобы остановиться на чем-нибудь определенном, случай

(60) $$U''_{\theta^2}(A, 0) = \frac{AF}{n\xi(\omega_0)} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f'(E_0 + F\cos nw + A\cos w)\sin nw \sin w dw > 0$$

и будем тогда рассматривать корень

(61) $$\theta = 0$$

Подставляя рассматриваемое значение (61) в уравнение (58), получим следующее соотношение для определения амплитуды A:

(62) $$f_1(A, 0) = A\xi(\overset{*}{\omega}).$$

Введем теперь в рассмотрение «обобщенную среднюю крутизну»

(63) $$S = s(A, F) = \frac{2}{\pi A}\int_0^\pi f(E_0 + F\cos nw + A\cos w)\cos w\,dw = \frac{f_1(A, 0)}{A}.$$

Тогда уравнение (62) может быть разрешено графически при помощи диаграммы обобщенной средней крутизны.

Для этого надлежит построить по точкам кривую (см. фигуры 3а и 3б)

(64) $$S = s(A, F),$$

откладывая значения A на оси X, а значения S на оси Y.

Абсцисса точки пересечения этой кривой с прямой управляющей проводимости, параллельной оси A

(65) $$S = \xi(\overset{*}{\omega}) = \frac{1}{r(\overset{*}{\omega})}$$

и даст искомое значение стационарной амплитуды.

Заметим кроме того, что в силу неравенства (60) условие минимума

$$|U''_{A\theta}|^2 < U''_{A^2}\, U''_{\theta^2}$$

приводится к такому простому соотношению

(66) $$\frac{\partial S}{\partial A} < 0,$$

ибо, как в этом нетрудно убедиться,

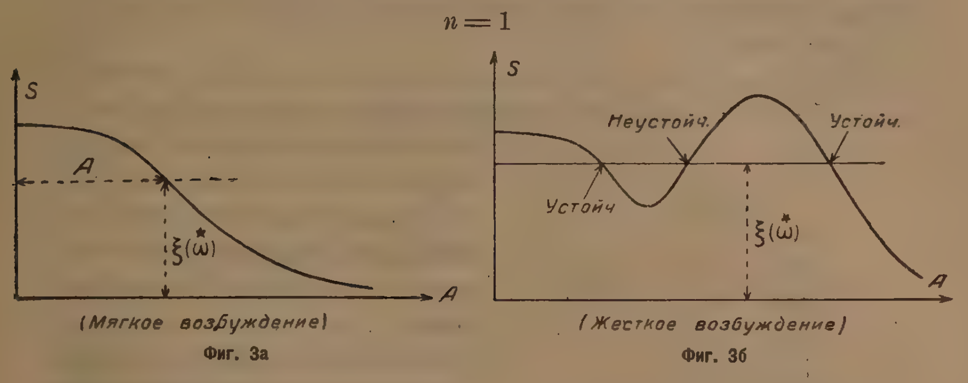
$$\frac{\partial S}{\partial A} = \frac{S^2}{f_1(A, 0)} \cdot \frac{|U''_{A\theta}|^2 - U''_{A^2}\, U''_{\theta^2}}{U''_{\theta^2}}.$$

Только что указанный способ определения стационарной амплитуды вместе с условием устойчивости (66), как видно, совершенно аналогичен обычному способу, основанному на квазилинейной теории и применяемому для исследования стационарных режимов электронного генератора в «свободном состоянии» (при отсутствии независимого возбуждения, т. е. когда $F = 0$).

Предлагаемый способ может быть рассматриваем следовательно как надлежащее распространение обычного практического метода расчета на исследование точного резонанса.

Для случая главного резонанса

$$n=1$$



(Мягкое возбуждение)

Фиг. 3а

(Жесткое возбуждение)

Фиг. 3б

имеем очевидно

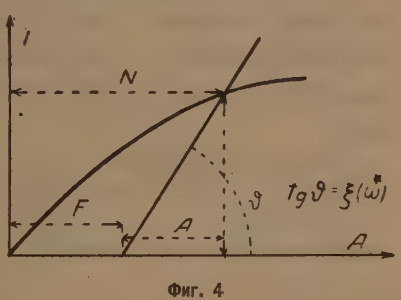
$$f_1(A,\ 0)=f_1(A+F);\quad s(A,\ F)=\frac{f_1(A+F)}{A},$$

где

$$f_1(A)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(E_0+F\cos w)\cos w\,dw.$$

В этом случае для нахождения стационарной амплитуды особенно удобно пользоваться хорошо известными диаграммами колебательных характеристик (Schwinglinien), для чего строим кривую (см. фиг. 4)

$$I=f_1(A)$$



Фиг. 4

и находим абсциссу N точки пересечения этой кривой с прямой

$$I=\xi(\overset{*}{\omega})(A-F).$$

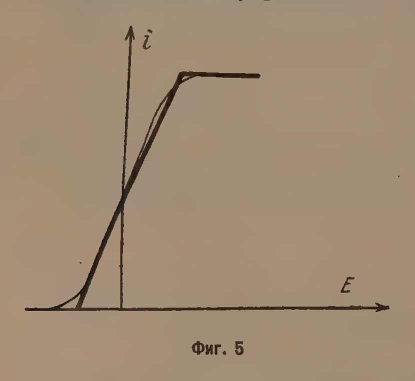
Искомая амплитуда и будет равна $N-F$.

Указанное построение есть однако не что иное как установленный с помощью квазилинейной теории метод Меллера для расчета электронных генераторов с независимым возбуждением при точном главном резонансе

$$\overset{*}{\omega}=\alpha.$$

Вышеизложенный метод непосредственно прилагается и к исследованию демультипликационных резонансов ($n > 1$), причем очевидно совершенно не требуется замены реальной характеристики лампы полиномиальным приближением. Характеристика лампы может быть задана просто графически, и тогда обобщенная средняя крутизна определяется при помощи графических построений.

Для целей быстрого практического расчета целесообразно воспользоваться каким-либо упрощением реальной характеристики, напр. полигональным (см. фиг. 5), что часто на практике применяется инженерами.



Фиг. 5

Укажем мимоходом также на возможность экспериментального фиксирования обобщенной средней крутизны.

В настоящей статье мы не будем останавливаться на этих деталях, разработать которые вполне могут уже сами практики и перейдем к анализу транзиторных процессов.

Заметим прежде всего, что ранее приведенное рассуждение, при помощи которого мы убедились, что точка $(A, \theta/n)$ движется по линии наибольшего ската функции U, хотя и дает ясное качественное представление о характере изменения амплитуды и фазы в течение транзиторного процесса, тем не менее лишь с трудом поддается удобному количественному исследованию.

Исходя из тождества

$$f_2(A, 0) = 0$$

можно усмотреть, что решение

(67) $$\theta = 0$$

удовлетворяет уравнению (54) при произвольном A.

Но тогда уравнение (54) дает:

(68) $$\frac{2\pi}{\delta\overset{*}{\omega}}\frac{dA}{dt} = \frac{s(A, F) - \xi(\overset{*}{\omega})}{\xi(\overset{*}{\omega})}A.$$

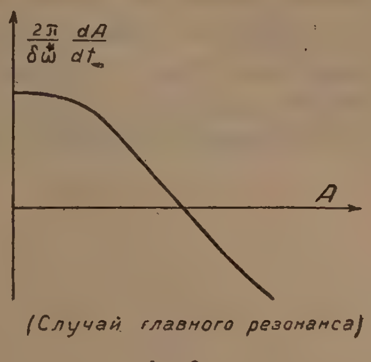
Полученное уравнение (68) очевидно интегрируется в квадратурах, ибо

(69) $$\xi(\overset{*}{\omega}) \cdot \frac{2\pi}{\delta\overset{*}{\omega}} \cdot \frac{dA}{f_1(A, 0) - \xi(\overset{*}{\omega})A} = dt.$$

Для выяснения характера решения весьма целесообразно построить диаграмму зависимости $\frac{dA}{dt}$ от A, откладывая значения A по абсциссам, значения же величин

$$F(A)=\frac{s(A, F)-\xi(\overset{*}{\omega})}{\xi(\overset{*}{\omega})}A$$

по ординатам (см. фигуры 6а, 6б, 6в).

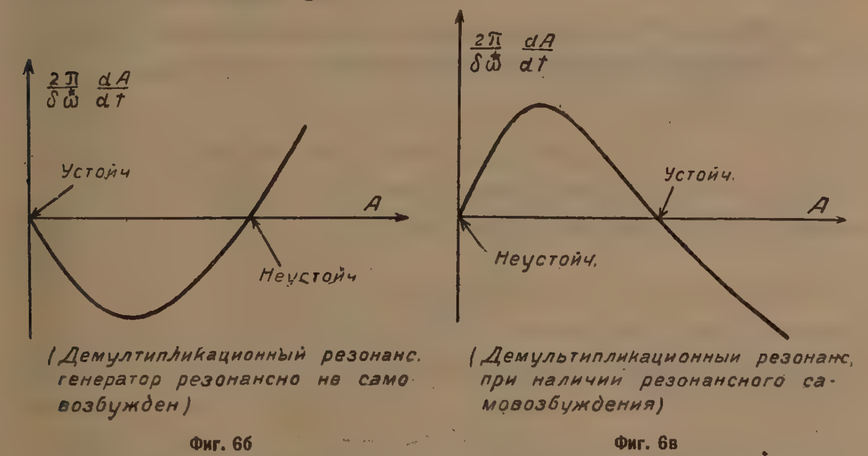


Фиг. 6а

На основании такой диаграммы легко можно убедиться, например, что если начальное значение A близко к нулю (т. е. если в начальный момент электронный генератор находится в статическом состоянии), то A монотонно возрастает или убывает, стремясь к наименьшему по величине устойчивому стационарному значению; при этом устойчивыми будут такие корни уравнения

$$F(A)=0,$$

проходя в положительном направлении через которые, функция изменяет положительный знак на отрицательный.



Фиг. 6б

Фиг. 6в

Рассмотрим сейчас специально тот случай, когда в начальный момент генератор находился в статическом состоянии.

Имеем в таком случае

$$u=0, \quad \frac{du}{dt}=0, \quad \text{при } t=0$$

и, так как

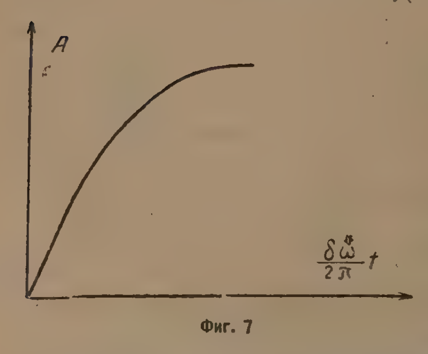
$$u = A\cos\frac{\alpha t + \theta}{n} + \rho u_1 + \ldots,$$

то ясно, что начальное значение A будет порядка малости ρ.

Теперь уже становится ясным то глубокое различие, которое существует между процессом установления для главного и для демультипликационных резонансов.

В самом деле, для главного резонанса

$$\frac{2\pi}{\delta\overset{*}{\omega}}\frac{dA}{dt} = \frac{1}{\xi(\overset{*}{\omega})} f_1(A + F) - A$$



Фиг. 7

и потому начальное значение $\frac{2\pi}{\delta\overset{*}{\omega}}\frac{dA}{dt}$, равняясь приближенно

$$\frac{1}{\xi(\overset{*}{\omega})} f_1(F),$$

не будет близко к нулю.

Таким образом A как функция времени будет иметь вид, схематически изображенный на фиг. 7.

Наоборот для демультипликационных резонансов значение обобщенной средней крутизны, вблизи точки $A = 0$, остается конечным:

$$s(0, F) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f'(E_0 + F\cos mw)\cos^2 w\, dw \tag{70}$$

и следовательно начальное значение

$$\frac{2\pi}{\delta\overset{*}{\omega}}\frac{dA}{dt}$$

будет порядка малости ρ. Кроме того, если

$$s(0, F) < \xi(\overset{*}{\omega}), \tag{71}$$

то A будет монотонно убывать, стремясь к нулю, и стационарный режим обращается таким образом в статический.

Наоборот при

$$s(0, F) > \xi(\overset{*}{\omega}) \tag{72}$$

начальные малые колебания будут раскачиваться, и амплитуда A монотонно возрастает, асимптотически приближаясь к некоторому отличному от нуля значению.

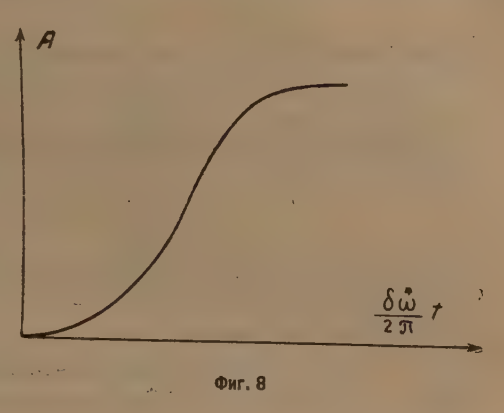
Кривая нарастания амплитуды

$$A = A(t),$$

схематически изображенная на фиг. 8, имеет очевидно тот же характер, что и кривая нарастания для обычного самовозбуждающегося генератора в свободном состоянии.

Неравенство (72) можно назвать поэтому условием резонансного самовозбуждения.

Интересно отметить, что параметры генератора и рабочие напряжения можно всегда выбирать так, чтобы генератор оказался несамовозбужденным, в свободном состоянии будучи тем не менее самовозбужденным при демультипликационном резонансе.



Фиг. 8

Вышеупомянутые свойства демультипликационных резонансов практически использованы в так называемых нелинейных фильтрах, работающих на основном демультипликационном резонансе $\overset{*}{\omega} = \frac{\alpha}{2}$, назначение которых состоит в уменьшении влияния быстрых атмосферных помех.

Надлежит заметить, что в нашем рассмотрении фигурировал частный интеграл уравнений (54), соответствующий начальному значению фазы, равному нулю.

Не представит при этом никакого затруднения применить подобное же рассуждение и для рассмотрения другого частного интеграла, начальная фаза которого будет π. Чтобы сразу получить формулы, относящиеся к этому последнему случаю, стоит лишь в вышеполученных соотношениях заменить F на $-F$.

Разумеется, в реальных условиях начальное значение фазы может принимать любое значение, так что, строго говоря, вероятность того, что это начальное значение фазы точно попадает на нуль или на π, равна нулю.

Однако, тем не менее, практическое значение вышеупомянутых частных интегралов усиливается тем обстоятельством, что в начале транзиторного

процесса фаза устанавливается «сама собою» и асимптотически приближается либо к значению равному нулю, либо к значению, равному π.

Возьмем, в самом деле, чтобы остановиться на чем-нибудь определенном, случай основного демультипликационного резонанса

$$n=2$$

и заметим, что для достаточно малых значений A имеют место следующие приближенные соотношения:

$$f_1(A,\theta)=A\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'\left(E_0+F\cos(2w-\theta)\right)\cos^2 w\,dw = A(S_0+S_1\cos\theta),$$

$$f_2(A,\theta)=A\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'\left(E_0+F\cos(2w-\theta)\right)\cos w\sin w\,dw = AS_1\sin\theta,$$

где

$$S_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f'(E_0+F\cos z)\,dz$$

$$S_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f'(E_0+F\cos z)\cos z\,dz.$$

Поэтому при достаточно малых значениях амплитуды, т. е. в начале транзиторного процесса, уравнения (54) дают для рассматриваемого случая

$$\frac{2\pi}{\delta\overset{*}{\omega}}\frac{dA}{dt}=A\left\{S_0-\xi(\overset{*}{\omega})+S_1\cos\theta\right\}\frac{1}{\xi(\overset{*}{\omega})},$$

(73)

$$\frac{2\pi}{\delta\overset{*}{\omega}}\frac{d\theta}{dt}=-\frac{n}{\xi(\overset{*}{\omega})}S_1\sin\theta,$$

откуда с очевидностью вытекает, что

$$\theta\to 0,\quad \text{если } S_1>0$$

$$\theta\to\pi\quad \text{если } S_1<0.$$

Итак в начале транзиторного процесса происходит самопроизвольное установление фазы к одному из значению

$$\theta=0,\ \theta=\pi$$

соответствующих вышерассмотренным частным интегралам.

Таким образом один из этих частных интегралов отвечает максимально быстрому процессу нарастания амплитуды, ибо этот процесс совершается при наиболее благоприятной фазе, в отношении нарастания амплитуды, тогда как при реальных транзиторных процессах должна установиться не только амплитуда, но и фаза, и весь процесс вначале протекает не при наиболее благоприятной фазе.

Видим, следовательно, что ордината кривой нарастания амплитуды

$$A(t),$$

вычисленная, исходя из соответствующего частного интеграла, является мажорантой реальной кривой нарастания.

При этом, основываясь на уравнениях (73), можно утверждать, что для основного демультипликационного резонанса реальная кривая нарастания будет тем ближе к своей мажоранте, чем меньше будет начальное значение амплитуды A.

Заканчивая это краткое рассмотрение транзиторных процессов, обратим внимание читателя на чрезвычайно интересные как с математической, так и с практической точки зрения проблемы установления колебаний в нелинейных фильтрах при совместном действии помехи и сигнала.

К сожалению, размеры настоящей статьи не позволяют нам изложить здесь наши исследования в этой важной области.

Скажем в заключение еще несколько слов по поводу явления резонанса при наличии расстройки.

В этом случае амплитуда и фаза стационарного колебания определяется из двух уравнений.

$$f_1(A,\ \theta)=\xi(\omega_0)A,$$
$$f_2(A,\ \theta)=\eta(\omega_0)A, \tag{74}$$

которые можно было бы получить также из квазилинейной теории посредством введения понятия комплексной средней крутизны:

$$\vec{S}=S_r+jS_i;\quad S_r=\frac{f_1(A,\ \theta)}{A},\quad S_i=\frac{f_2(A,\ \theta)}{A}. \tag{75}$$

В целом ряде практически важных случаев уравнения (74) могут быть приведены к более удобной форме, содержащей лишь одно неизвестное, что разумеется является особо желательным для графического построения кривой резонанса.

Так например, при главном резонансе $n=1$, вводя новые неизвестные

$$A + F\cos\theta = N\cos\psi,$$
$$F\sin\theta = N\sin\psi,$$

физический смысл которых совершенно очевиден (а именно N и ψ будут соответственно амплитудой и фазой переменной части полного управляющего напряжения), получим

$$[f_1(N) - \xi(\omega_0)N]^2 + [\eta(\omega_0)N]^2 = \{[\xi(\omega_0)]^2 + [\eta(\omega_0)]^2\}N^2,$$
$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\eta(\omega_0)}{\xi(\omega_0)}.$$

Кроме того для демультипликационных резонансов при достаточно малом значении F имеем приближенно:

$$f_1(A,\theta) = f_1(A) + \frac{2}{\pi}F\left\{\int_0^\pi f'(E_0 + A\cos w)\cos nw\cos w\,dw\right\}\cos\theta =$$
$$= f_1(A) + \frac{\partial f_n(A)}{\partial A}F\cos\theta.$$
$$f_2(A,\theta) = \left\{\frac{2}{\pi}F\int_0^\pi f'(E_0 + A\cos w)\sin nw\sin w\,dw\right\}\sin\theta =$$
$$= \frac{nf_n(A)}{A}F\sin\theta,$$

где

$$f_n(A) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(E_0 + A\cos w)\cos w\,dw,$$

и таким образом из (74) получим:

$$[f_1(A) - \xi(\omega_0)A]^2\frac{1}{\left[\frac{\partial f_n}{\partial A}\right]^2} + \left[\eta(\omega_0)\frac{A^2}{nf_n(A)}\right]^2 = F^2; \quad \sin\theta = \frac{\eta(\omega_0)A^2}{Fnf_n(A)}.$$

Можно было бы разобрать еще значительное число различных частных случаев, но на этом мы тут останавливаться не будем.

Заканчивая изложение настоящей статьи, где приведена лишь часть полученных нами результатов, заметим, что хотя некоторые из приведенных указаний уже используются на практике, тем не менее, по нашему мнению, полезно было дать теоретическое обоснование тем более, что в вопросах этого рода теория может реально дать соответствующие указания для рационального проектирования целого ряда важных аппаратов, например, нелинейных фильтров.

NICOLAS KRYLOFF ET NICOLAS BOGOLĬUBOFF. LES MÉTHODES SYMBOLIQUES DE LA MÉCANIQUE NON LINÉAIRE DANS LEUR APPLICATION À L'ÉTUDE DE LA RÉSONANCE DANS L'OSCILLATEUR

RÉSUMÉ

Introduction. Ici se trouvent exposées quelques remarques d'ordre critique et concernant les théories habituelles (non linéaires et quasi-linéaires) des oscillations en Radiotechnique. Une méthode symbolique nouvelle de la Mécanique non Linéaire a été proposée pour aborder le problème.

§ 1. Quelques remarques préliminaires. Les équations symboliques du fonctionnnement de l'oscillateur. En se servant de la notion des schémas équivalents les auteurs de cet article ont établi ici les équations symboliques fondamentales du fonctionnement de l'oscillateur en traitant avec une attention toute particulière le cas des systèmes des types de Thomson. Chemin faisant ont été faites quelques indications relatives à l'interprétation de certaincs expressions symboliques se rencontrant au cours de ce travail.

§ 2. Les méthodes générales de la solution approchée de l'équation symbolique fondamentale. Ce paragraphe est consacré à l'exposition d'une méthode nouvelle (due aux auteurs) de la Mécanique non Linéaire dans son application à la solution approchée de l'équation symbolique (au voisinage du domaine de résonance), et qui réside au fond dans la transformation appropriée de l'équation différentielle ordinaire du problème en une équation aux dérivées partielles. La solution fournie par cette méthode se présente sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances d'un petit paramètre et les procédés adéquates ont été indiqués par les auteurs pour la détermination des termes arbitraires de cette série. Les auteurs ont discuté ici en détail la première approximation (fournie par leur méthode) qui elle-seule est capable, ce semble, de satisfaire aux besoins de la pratique, tout en permettant d'expliquer le caractère qualitatif de la solution cherchée. Dans cette première approximation la fonction inconnue se présente sous la forme d'une expression sinusoïdale, dont l'amplitude et la phase (comme les fonctions du temps) vérifient un système de deux équations différentielles du premier ordre ne contenant pas le temps explicitement.

§ 3. Étude de la résonance complète. Dans ce paragraphe les auteurs examinent les équations différentielles de la première approximation (pour le cas quand le désaccord entre la fréquence propre de l'oscillateur et le sousmultiple de la fréquence d'excitation extérieure est nul) et démontrent entre autre que le point représentatif des équations étudiées (où l'amplitude et la phase sont les coordonnées polaires) se meut suivant la ligne de la plus grande pente relative à une surface $z = U$, U étant une fonction convenablement construite d'après les données du problème.

Les auteurs ont indiqué ici, de plus, quelques procédés graphiques analogues à ceux de la théorie quasi-linéaire pour la détermination des amplitudes stationnaires et de leur stabilité.

Les calculs des auteurs mettent en relief la différence profonde (signalée déjà par les expérimentateurs) entre les phénomènes transitoires relatifs à la résonance principale et ceux qui se rapportent à des résonances de démultiplication.

A la fin se trouvent additionnées quelques remarques complémentaires concernant l'étude de la résonance dans le cas où un désaccord entre la fréquence propre de l'oscillateur et le sousmultiple de la fréquence d'excitation extérieure se fait sentir.

23 XI 1933.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

des travaux récents de Prof. Dr. Nicolas Kryloff et Dr. Nicolas Bogoliùboff dans le domaine de la Mécanique non Linéaire et ses différentes applications.

1) Quelques exemples d'oscillations non linéaires. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, t. 194, p. 957 (14 III 1932).
2) Sur le phénomène de l'entraînement en radiotechnique. Ibid., t. 194, p. 1064 (21 III 1932).
3) Les phénomènes de démultiplication de fréquence en radiotechnique. Ibid., t. 194, p. 1119 (29 III 1932).
4) Sur quelques propriétés générales des résonances dans la mécanique non linéaire. Ibid., t. 197, p. 903 (23 X 1933).
5) Problèmes fondamentaux de la Mécanique non Linéaire. Revue générale des Sciences (№ de 15 I 1933).
6) Recherches sur la stabilité dynamique des machines synchrones (Monographie). En langue russe avec une préface en français. 100 pp., Kieff, 1932.
7) Recherches sur la stabilité longitudinale des avions (Monographie en russe avec un résumé en français). 60 pp., Kieff, 1932.
8) Recherches sur la stabilité statique et la stabilité dynamique des machines synchrones. Rapport № 14 à la 3-ème Section du Congrès International d'Electricité, Paris, 1932.
9) Problèmes fondamentaux de la Mécanique non Linéaire (en russe). Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, № 4, 1933.
10) Fundamental Problems of the non lienear mechanics. Congrès International des Mathématiciens, Zurich, 1932.
11) Méthodes nouvelles de la Mécanique non Linéaire dans leur application à l'étude du fonctionnement de l'oscillateur à lampe. Partie première. Étude des régimes stationnaires dans le cas de l'absence des forces extérieures périodiques. № 7 dans la Collection de monographies scientifiques de Prof. Dr. N. Kryloff et Dr. N. Bogoliùboff (en russe avec la préface en français). 250 pp., Moscou. Sous presse.
12) Méthodes nouvelles de la Mécanique non Linéaire dans leur application à l'étude de la perturbation des mouvements périodiques et de divers phénomènes de résonance s'y rapportant. 100 pp. sous presse.
13) Les méthodes symboliques de la Mécanique non Linéaire dans leur application à l'étude de résonance dans l'oscillateur (en russe). Sous presse.
14) Über einige Methoden der Nichtlinearen Mechanik in ihrer Anwendungen zur Theorie der nicht linearer Resonanz. Sous presse.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

АНОМАЛЬНАЯ ДИСПЕРСИЯ В ШИРОКИХ ПОЛОСАХ ПОГЛОЩЕНИЯ

Д. С. РОЖДЕСТВЕНСКОГО

1. Полный ход кривой аномальной дисперсии внутри линии или полосы поглощения наблюдается интерференционным методом Пуччианти с большим трудом, так как поглощение одного из интерферирующих пучков делает интерференционные полосы очень бледными и размытыми. Так, в расширенных атмосферным давлением линиях D_1 или D_2 паров натрия удалось[1] наблюдать только очень незначительный изгиб кривых дисперсий в максимуме и минимуме. Если увеличить толщину слоя или плотность паров и тем самым дисперсию, то поглощение возрастает настолько, что интерференционные линии пропадают совершенно. Так должно быть одинаково и в широких и в узких полосах поглощения, если ширина полосы поглощения обусловливается только величиной коэффициента трения или затухания в уравнении колебания вибратора. Между тем в сравнительно широких полосах поглощения, например растворов солей редких земель, можно без особого труда видеть полный ход кривой дисперсии, изгибы в максимуме и минимуме значительно более половины полосы. Это противоречит теории дисперсии и требует объяснения. Оно лежит в сложности полос поглощения. Действительно, нет никаких оснований думать, что в широких полосах поглощения жидкостей и твердых тел мы имеем вибраторы только одного рода с определенной частотой колебаний. Наоборот, очень вероятно, что широкая полоса представляет ряд слившихся более узких полос. Ширина полосы может определяться не коэффициентом затухания, а распределением плотности числа вибраторов по частотам. В таком случае ход кривых дисперсии и поглощения может быть совсем иной, и видимость кривой дисперсии, полученной при помощи интерференционного метода внутри области поглощения, может отличаться от видимости внутри линии поглощения, соответствующей вибраторам с одной определенной частотой колебаний.

[1] Д. Рождественский. Простые соотношения в спектрах щелочных металлов, 25—33, Петроград, 1915.

Чтобы ориентироваться в этом вопросе, был вычислен ход дисперсии и поглощения при некоторых простых распределениях плотности вибраторов, как функции частот, и вычисления, приведенные далее, показали, что действительно видимость кривой дисперсии внутри области поглощения может возрастать. Кроме того стало очень наглядным, что из ширины полос поглощения нельзя делать выводов относительно коэффициента затухания вибратора, даже если измерения дают классический ход кривых дисперсии и поглощения, какой соответствует одному роду вибраторов с одной определенной частотой. Можно подобрать такое распределение плотности вибраторов по частотам, что классический ход обеих кривых будет воспроизведен с точностью, но тем не менее ширина полосы будет определяться не коэффициентом затухания, а распределением плотности. Таким образом, если заранее ничего не известно о числе вибраторов с различными частотами или о распределении их плотности, то из кривых дисперсии и поглощения нельзя сделать точного вывода относительно затухания вибраторов. Единственное заключение, которое дается относительно вибраторов, — это общее их число. Оно не зависит от коэффициента затухания и по теореме, установленной Т. П. Кравцом, получается измерением площади кривой поглощения.

2. Начнем с одиночной линии поглощения.

Пусть

$$\nu_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$$

частота колебания вибратора.

Если ограничиться узкой областью спектра, то можно положить $\nu = \nu_0$ всюду, где эта величина не входит в разность, которую обозначим через $\mu = \nu - \nu_0$. Далее N — число вибраторов в 1 $см^3$, и обозначим:

$$\rho = \frac{4\pi N e^2}{m},$$

где e и m — заряд и масса электрона; ν' характеризует затухание колебаний электрона. Тогда для показателя преломления и коэффициента поглощения имеем известные формулы:

$$n - 1 = -\frac{\rho\mu}{\nu_0(4\mu^2 + \nu'^2)}, \tag{1}$$

$$k = \frac{\rho\nu'}{2\nu_0(4\mu^2 + \nu'^2)}, \tag{2}$$

где ν' определяет ширину линии поглощения. Действительно, при $\mu = 0$ величина k имеет максимальное значение:

$$k_m = \frac{\rho}{2\nu_0 \nu'},$$

а при $\mu = \pm \frac{1}{2} \nu'$ она падает вдвое, и $n - 1$ получает максимальное или минимальное значение:

$$n_m - 1 = \pm \frac{k_m}{2}.$$

Определим ширину полосы как разность частот, для которых коэффициент поглощения падает вдвое по сравнению с максимальной величиной. В таком случае ширина равна ν'.

По методу Пуччианти в интерферометре Жамена один из интерферирующих лучей проходит через плоскопараллельный слой вещества (толщина d), и горизонтальные интерференционные полосы проектируются на вертикальную щель спектрографа. При этом вводится разность хода, измеряемая числом P переместившихся вверх или вниз полос:

$$P = \frac{(n-1)d}{\lambda}.$$

Практически в узкой области спектра $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$, и P чертит в спектре ход кривой $n - 1$. Интерференционные полосы контрастны, когда амплитуда A_0 интерферирующих лучей одинакова: в минимумах интенсивность света равна нулю, в максимумах $4A_0^2$. Но амплитуды не одинаковы для лучей, соответствующих области внутри полосы поглощения, так как амплитуда прошедшей через слой вещества волны уменьшается по показательному закону:

$$A = A_0 e^{-\frac{2\pi kd}{\lambda}}.$$

Видимость полос интерференции, которую можно характеризовать отношением Q интенсивности света в максимумах и минимумах:

$$Q = \frac{(A + A_0)^2}{(A - A_0)^2},$$

быстро падает от бесконечности к величине, близкой к единице; полосы становятся бледными и размытыми. Какое смещение полосы можно наблюдать в максимуме кривой дисперсии:

$$P_m = \frac{n_m - 1}{\lambda} d = \frac{k_m d}{2\lambda},$$

если мы согласимся производить измерения, когда интенсивность в максимумах интерференционных полос будет лишь в $1^1/_2$ раза превышать интенсивность в минимумах в том месте полосы поглощения, которое соответствует $n_m - 1$? Интерференционные полосы будут уже весьма бледными, и точность измерения P_m сильно упадет. Так как в этом месте спектра коэффициент поглощения равен $\frac{k_m}{2}$, то

$$A = A_0 e^{-2\pi P_m},$$

и, следовательно, уже с трудом измеряемая величина P_m определится из уравнения:

$$Q = 1.5 = \left(\frac{1 + e^{-2\pi P_m}}{1 - e^{-2\pi P_m}}\right)^2,$$

откуда $P_m = 0.37$. Таким образом, хотя и не точно, но все же можно наблюдать смещение приблизительно в одну треть полосы. Если бы мы захотели удвоить наблюдаемое P_m увеличением длины d, то видимость Q сделалась бы равной 1.04, и интенсивность света в максимумах и минимумах интерференционных полос отличалась бы лишь на 4%: они были бы неразличимы. Вычисленный практически предел наблюдения аномальной дисперсии в максимуме не зависит ни от ширины полосы поглощения (т. е. величины ν'), ни от толщины слоя, ни от собственной частоты, а исключительно лишь от отношения $\frac{n_m - 1}{k}$, которое всегда равно единице. Наблюдение над расширенными атмосферным давлением линиями D_1 и D_2 паров натрия показало, что аномальную дисперсию внутри линии поглощения можно видеть, можно даже констатировать некоторую непредвиденную в теории асимметрию, но производить измерения было бы бесцельно: они оказались бы слишком неточными.[1]

Далее мы увидим, что в сложных полосах отношение $\frac{n_m - 1}{k}$ может быть и больше единицы, и этим отношением мы будем определять видимость.

[1] Можно было бы обойти это затруднение, вставив на пути лучей интерферометра плоскопараллельную пластинку, покрытую слоем поглощающего вещества (тонким, отчасти прозрачным слоем серебра) там, где ее пересекает луч, не проходящий через пары натрия. Подобрав поглощение слоя равным поглощению паров натрия в данной точке кривой, можно в этой точке восстановить полную видимость. Однако, при этом она потеряется в соседних точках, и будет виден лишь короткий отрезок кривой дисперсии, а почти горизонтальные части станут сильно размытыми. Этот способ мало удобен для таких узких полос, как линия натрия, но вполне применим для сравнительно широких полос поглощения (редкие земли, краски). Не трудно видеть, как учесть при измерениях разность хода, вводимую поглощающим слоем.

дисперсии. Пропорционально ему возрастает и максимальная наблюдаемая интерферометрическим методом величина P_m.

3. Возьмем N вибраторов не все одинаковой частоты ν_0, а распределим их с равномерной плотностью в участке спектра от $\nu_0 - a$ до $\nu_0 + a$. В таком случае в элементе длины спектра dx, на расстоянии x от ν_0, число вибраторов будет пропорционально $\frac{\rho}{2a}$, и, если μ по прежнему обозначает расстояние в спектре от ν_0, показатель преломления и коэффициент поглощения будут выражаться следующими формулами:

$$n - 1 = -\frac{\rho}{2a\nu_0}\int_{-a}^{+a}\frac{(\mu - x)\,dx}{4(\mu - x)^2 + \nu'^2} = \frac{\rho}{16a\nu_0}\log\frac{4(\mu - a)^2 + \nu'^2}{4(\mu + a)^2 + \nu'^2}, \tag{3}$$

$$k = \frac{\rho\nu'}{4a\nu_0}\int_{-a}^{+a}\frac{dx}{4(\mu - x)^2 + \nu'^2} =$$

$$= \frac{\rho}{8a\nu_0}\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2(\mu + a)}{\nu'} - \operatorname{arc\,tg}\frac{2(\mu - a)}{\nu'}\right] = \tag{4}$$

$$= \frac{\rho}{8a\nu_0}\operatorname{arc\,tg}\frac{4a\nu'}{4(\mu^2 - a^2) + \nu'^2},$$

причем в (4) arc tg может изменяться от 0 до π.

Легко найти, что $n - 1$ имеет одинаковые по абсолютной величине максимум и минимум $n_m - 1$ при

$$\mu^2 = a^2 + \frac{\nu'^2}{4}, \tag{5}$$

а k имеет максимальное значение при $\mu = 0$, когда:

$$k_m = \frac{\rho}{4a\nu_0}\operatorname{arc\,tg}\frac{2a}{\nu'}.$$

Совершенно так же, как и в простой полосе, когда $n - 1$ получает максимальное или минимальное значение, величина k становится вдвое меньше максимальной величины, что легко видеть, подставляя μ^2 из (5) в последнюю формулу (4).

Согласно принятому выше определению, ширина полосы равна:

$$2\sqrt{a^2 + \frac{\nu'^2}{4}} = \sqrt{4a^2 + \nu'^2},$$

или приблизительно равна $2a$, если ν' примем малым по сравнению с a. Чтобы выяснить условие видимости дисперсии внутри области поглощения

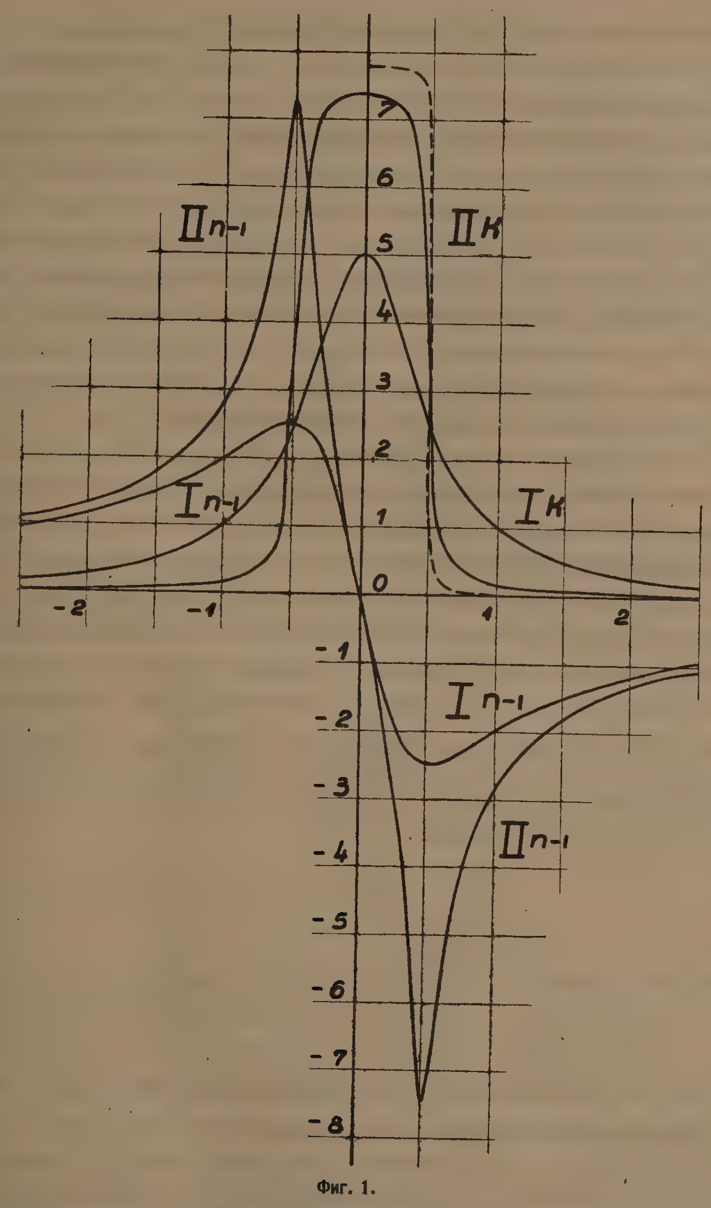
и самый вид кривых, сравним их с кривыми (1) и (2) в одинаковых условиях. С одной стороны, увеличим ширину одиночной полосы, например в 10 раз, подставив в (1) и (2) $10\,\nu'$ вместо ν'. С другой стороны, выберем такое a в (3) и (4), чтобы ширина этой сложной полосы, составленной из тонких полос, тоже равнялась $10\nu'$, — иначе говоря, возьмем $\sqrt{4a^2 + \nu'^2} = 10\nu'$, и отсюда с достаточным приближением $2a = 9.95\nu'$. Вычисленные в этих условиях кривые (1) и (2) под знаком I, а кривые (3) и (4) под знаком II представлены на фиг. 1. При этом произвольно принят масштаб ординат $\frac{\rho}{20\nu_0\,\nu'} = 5$, а единицей для абсцисс принята одинаковая ширина обеих полос поглощения.

Из кривых видно, что максимальное поглощение k_m в II увеличилось по сравнению с I немного — в 1.47 раз, а максимум дисперсии $n_m - 1$ вырос в II гораздо сильнее — в 3.00 раз. Следовательно, и предел видимости дисперсии также увеличился. Отношение $\frac{n_m - 1}{k}$, которое одинаково равно единице для тонких и широких полос типа I, для полос типа II вычисляется из следующей формулы:

$$\frac{n_m - 1}{k} = \frac{\lg \frac{4a}{\nu'}}{\operatorname{arc\,tg} \frac{2a}{\nu'}}. \tag{6}$$

Она легко получается, если взять отношение равенства (3) при условии (5), пренебрегая ν'^2 по сравнению с a^2, к равенству (4) при том же условии. Если $\frac{2a}{\nu'}$ равно 10, как в нашем примере, то легко вычислить, что видимость дисперсии равна 2.04. Наибольшая наблюдаемая разность хода P_m в кривой дисперсии возрастает в 2 раза, до 0.74 полосы, и для глаза это значительное увеличение. Это соответствует приблизительно тому, что наблюдается в широких полосах поглощения растворов солей редких земель.

Можно итти и дальше, повышая отношение $\frac{2a}{\nu'}$. Так как $\operatorname{arc\,tg}\frac{2a}{\nu'}$, уже близкий к $\frac{\pi}{2}$, увеличится едва заметно, то практически видимость будет расти логарифмически с шириной полосы, составленной из тонких линий. Если $\frac{2a}{\nu'} = 100$, то видимость в 3.37 раз больше, чем в одиночной полосе. Но если начертить кривые I и II, соответствующие ширинам полос не $10\nu'$, а $100\nu'$, то ясно будет несоответствие вида широкой сложной полосы II обычно наблюдаемым полосам поглощения. Действительно, подставим в (1)



Фиг. 1.

и (2) $100\nu'$ вместо ν'. Попрежнему примем ширину новой полосы за единицу и увеличим ординаты в 10 раз. Тогда новые кривые (1) и (2) при $100\nu'$, вместо ν', точно совпадут с кривыми I на фиг. 1. Проделаем те же изменения масштабов для кривых (3) и (4), в которых принята ширина

полосы поглощения $\sqrt{4a^2+\nu'^2}=100\nu'$. При этом, конечно, не получатся снова кривые II. Кривая поглощения примет очень неестественный вид: это будет почти аккуратный прямоугольник, половина которого (чтобы не загружать рисунка) начерчена пунктиром на фиг. 1. Кривая дисперсии не начерчена: она имеет максимум и минимум при тех же абсциссах, как и кривые I и II, но их абсолютная величина будет значительно больше (12.9); а при абсциссах $\mu>|2|$ новая кривая дисперсии практически сольется с II $n-1$. Таких полос поглощения с прямоугольным ходом кривой, с резким обрывом, в действительности не бывает. И даже кривые поглощения IIk уже неестественны. Поэтому постараемся придумать такое распределение плотности вибраторов, которое бы больше соответствовало нашим представлениям о реальных полосах поглощения.

4. На последнем примере (пунктир на фиг. 1) мы видим, что широкая полоса поглощения, составленная из тонких линий, почти не сохраняет воспоминания о тонкости составляющих, а довольно точно воспроизводит кривую распределения плотности вибраторов — в данном случае прямоугольник. Поэтому, если мы распределим плотности вибраторов по тому закону, который соответствует кривой поглощения IIk [уравнение (2)], то можем ожидать, что в сложных кривых дисперсии и поглощения вновь будут воспроизведены кривые (1) и (2). Возьмем, следовательно, число вибраторов на участке dx пропорциональным $\frac{\rho b\,dx}{\pi(b^2+x^2)}$ и удостоверимся, что интеграл этого выражения от $-\infty$ до $+\infty$ равен ρ, — иначе говоря, мы сохранили прежнее общее число вибраторов. Тогда:

$$n-1=-\frac{1}{\nu_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho b(\mu-x)\,dx}{\pi[4(\mu-x)^2+\nu'^2](b^2+x^2)}=-\frac{\rho\mu}{\nu_0[4\mu^2+(2b+\nu')^2]},\quad (7)$$

$$k=\frac{\nu'}{2\nu_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho b\,dx}{\pi[4(\mu-x)^2+\nu'^2](b^2+x^2)}=\frac{\rho(2b+\nu')}{2\nu_0[4\mu^2+(2b+\nu')^2]}.\quad (8)$$

Пределы, равные $\pm\infty$, в интегралах можно брать только в том случае, если b мало по сравнению с ν_0. Иначе говоря, как и для кривых (1) и (2), область спектра, где плотность вибраторов заметно отличается от нуля, должна оставаться достаточно малой. Тогда элементы интегралов вне этой области практически ничего не вносят в общую сумму. Пределы интегрирования можно было бы ограничить краями этой области, но практически можно и удобнее приравнять их $\pm\infty$. Мы предполагаем ν' весьма малым по сравнению с ν_0, так что b, хотя и может быть значительно больше ν',

но все же остается $\leqslant \nu_0$. То же ограничение должно быть для a в формулах (3) и (4).

Как видно, наши ожидания оправдались, и при новом распределении плотности вибраторов сохранился тип кривых (1) и (2) с заменой ν' через $2b + \nu'$. Выросла лишь ширина полосы. Видимость дисперсии, конечно, осталась прежней, как и для кривых (1) и (2). Но теперь ясно, что, получив измерением кривые (7) и (8), которые по виду совпадают с (1) и (2), мы не можем вывести, как это хотелось бы на первый взгляд, и как это делали некоторые исследователи, заключения об одинаковости частоты всех вибраторов. Полоса может быть простой, но она может быть и сложной. Пусть даже мы сохраним предположение, что затухание всех вибраторов одинаково, тем не менее полученную из опыта величину $2\nu + b'$ можно любым образом разлагать на два слагаемых. Можно принять, например, что $2b = 0$, и считать, что частота всех вибраторов одинакова. Наоборот, можно полагать, что ν' исчезающе мало по сравнению с $2b$, и вывести закон плотности распределения вибраторов по частотам. Наконец, можно сделать любую среднюю гипотезу. Все эти предположения произвольны, если мы ничего не знаем о вибраторах из других соображений, кроме данных измерения кривых дисперсии и поглощения. На самом деле вопрос еще сложнее, так как и предположение об одинаковости затухания для всех вибраторов произвольно. Единственное, о чем можно сделать правильное заключение из данных опыта, — это общее число вибраторов N. Т. П. Кравец[1] показал, что для любой сложной полосы площадь кривой

$$\int_0^\infty k\nu \, d\nu,$$

независимо от затухания отдельных вибраторов и распределения их плотности по частотам, пропорциональна общему числу вибраторов. Эта теорема установлена для точных кривых поглощения. В случае узкой полосы мы считаем ν постоянным и сразу видим, что площадь кривых (2) и (8) равна $\frac{\pi\rho}{4\nu_0}$ и, следовательно, пропорциональна N, но не зависит от величин ν' или b. Для кривой (4) получится, конечно, тот же результат, причем легче получить его, интегрируя сначала по μ в пределах $\pm\infty$, а затем по x в пределах $\pm a$.

[1] Т. П. Кравец. Абсорбция света в растворах окрашенных веществ, 71—73, Москва, 1912.

5. Чтобы приблизиться несколько к естественным полосам поглощения, возьмем распределение плотности вибраторов, соответствующее уже не прямоугольнику, а равностороннему треугольнику.

На фиг. 2 даны две кривые распределения плотности вибраторов. Кривая Ik фиг. 2 дает функцию $\frac{\rho c}{\pi(c^2+x^2)}$. Мы увидим далее, что при некотором предположении относительно ν' и определенном выборе масштабов она совпадает с кривой поглощения k. Это относится также и к функции распределения плотности IIIk фиг. 2 в виде отрезков двух прямых:

$$\frac{\rho_1}{2c}\left(1+\frac{x}{2c}\right) \text{ от } x=-2c \text{ до } x=0$$

и (9)

$$\frac{\rho_1}{2c}\left(1-\frac{x}{2c}\right) \text{ от } x=0 \text{ до } x=2c.$$

На фиг. 2 принято $2c=1$ и видно, что отрезки прямых касаются кривой Ik в точках $\pm c$. Кроме того видно, что максимальные ординаты обеих функций, произвольно принятые равными 5, совпадают. Это значит, что:

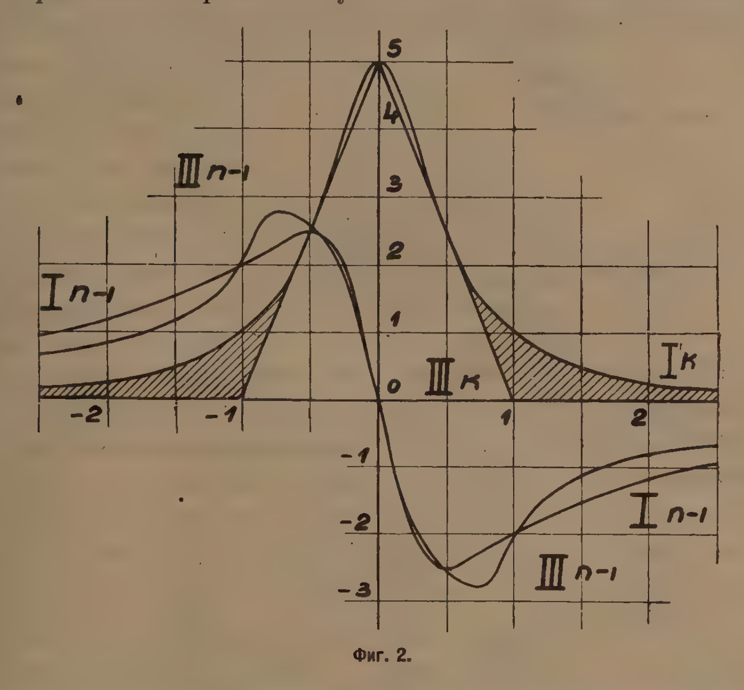
$$\rho_1=\frac{2}{\pi}\rho=0.637\rho.$$

Площадь первой кривой равна ρ, а второй — ρ_1. Мы отступаем от прежнего правила и будем сравнивать кривые дисперсии и поглощения, возникающие от неодинакового общего числа вибраторов. Но, как увидим далее, обе кривые поглощения будут иметь одинаковую максимальную величину и одинаковую ширину. Другое отступление заключается в том, что для вибраторов в обоих случаях распределения плотности будет принято исчезающе малое затухание. То и другое отступление делает результаты сравнения кривых более ясными.

Не трудно найти формулы для $n-1$ и k, аналогичные (3) и (4) при распределении плотности треугольником и при любой величине ν'. Но эти формулы очень сложны и мало наглядны. Они становятся значительно проще, если принять ν' исчезающе малым по сравнению с ν_0 и с шириной полосы. Такое предположение имеет полный физический смысл, и на него указывают, повидимому, и многие экспериментальные данные. Так Т. П. Кравец[1] привел ряд доводов в пользу этого взгляда. Он показал, что экспериментальные полосы поглощения можно объяснить только в том случае, если

[1] Т. П. Кравец, l. с., 61—63.

считать их сложными, составленными из тонких полос. Особенно убедительны вычисления С. И. Вавилова, о которых речь будет далее. Наконец, мы увидим, что один тип дисперсии и поглощения нельзя объяснить никаким другим способом, кроме такой гипотезы. Поэтому в дальнейшем мы примем ее и выведем предельные формулы, которые получаются, когда отношение ν' к ширине полосы стремится к нулю.

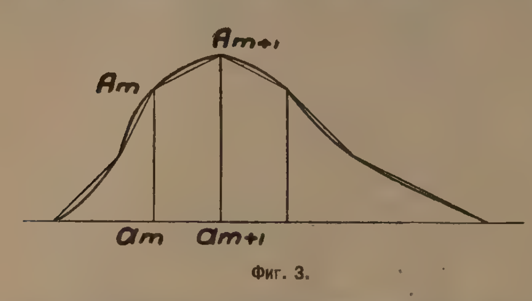


Фиг. 2.

При этом кривая поглощения в точности воспроизводит кривую распределения плотности. Если распределение плотности выражается прямоугольником, то и кривая коэффициента поглощения сколь угодно приближается к прямоугольнику, как это уже было видно на фиг. 1 (пунктир) при достаточно малом ν'. Точно так же треугольное распределение плотности приводит к кривой поглощения, имеющей вид такого же треугольника. С кривой дисперсии дело обстоит несколько сложнее. Так, в формуле (3) нельзя положить $\nu' = 0$, так как $n - 1$ получит тогда значение $\pm\infty$ в максимуме и минимуме. Всякий разрыв функции плотности, не имеющий, конечно, физического значения, отзывается превращением $n - 1$ в логарифмическую бесконечность на месте разрыва. При распределении плотности $\frac{\rho}{2a}$ мы имеем разрыв на краях промежутка $\pm a$. При кривой плотности

в виде треугольника разрыва самой функции нет, есть лишь разрыв производной, который не приводит к неприятным последствиям, как будет видно далее.

6. Прежде чем обратиться к частному случаю заданного уже треугольника, выведем более общие формулы для кривых k и $n-1$, которые нам понадобятся далее. Они по существу мало отличаются от формул, которые употреблял для своих вычислений С. И. Вавилов, но несколько проще и имеют более наглядный и удобный для вычисления вид. Вывод будет дан подробнее, чтобы яснее был переход к пределу $\nu' \to 0$.



Фиг. 3.

Всякое распределение плотности можно представить в виде ряда конечного числа отрезков прямых, как на фиг. 3. Далее будет видно, как и с какой степенью точности это нужно сделать. Пусть m-й отрезок проходит через точки A_m и A_{m+1} при абсциссах a_m и a_{m+1}. Прямую, выражающую функцию плотности, обозначим для краткости через $f_m(x)$, а ее производную — через

$$f_m' = \frac{A_{m+1} - A_m}{a_{m+1} - a_m},$$

причем

$$f_m(a_{m+1}) = A_{m+1} = f_{m+1}(a_{m+1}).$$

Конечно, в реальных случаях ни одна из f_m' не равна бесконечности. Рассмотрим величину k, которая получается от действия вибраторов, соответствующих только m-му отрезку:

$$k = \frac{1}{2\nu_0}\int_{a_m}^{a_{m+1}} \frac{\nu' f_m(x)\,dx}{4(\mu - x)^2 + \nu'^2} = \frac{1}{4\nu_0}\int_{\frac{2(a_m-\mu)}{\nu'}}^{\frac{2(a_{m+1}-\mu)}{\nu'}} \frac{f_m(\mu) + \frac{z\nu'}{2} f_m'}{1 + z^2}\,dz.$$

Последняя формула получается из первой подстановкой

$$x = \mu + \frac{z\nu'}{2}$$

и легко интегрируется, именно:

$$k = \frac{1}{4\nu_0}\left\{f_m(\mu)\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{2(a_{m+1}-\mu)}{\nu'} - \operatorname{arc\,tg}\frac{2(a_m-\mu)}{\nu'}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu'}{4}f_m{}'\lg\frac{\nu'^2+4(a_{m+1}-\mu)^2}{\nu'^2+4(a_m-\mu)^2}\right\}.$$

Когда ν' стремится к нулю, то член с множителем $f_m{}'$ тоже стремится к нулю при всех значениях μ. В остальной части рассмотрим сначала только такие точки μ, для которых

$$\frac{\nu'}{2(a_{m+1}-\mu)} \leqslant 1$$

и

$$\frac{\nu'}{2(a_m-\mu)} \leqslant 1.$$

Если μ заключено в промежутке $a_m < \mu < a_{m+1}$, то, разлагая arc tg в ряд и ограничиваясь первым членом, получаем:

$$k = \frac{1}{4\nu_0}f_m(\mu)\left[\pi - \frac{\nu'}{2(a_{m+1}-\mu)} + \frac{\nu'}{2(a_m-\mu)}\right].$$

Для точек вне этого промежутка π в квадратных скобках пропадает, и остается только та часть, которая обращается в нуль при $\nu' \to 0$. Таким образом в очень узкой области около краев промежутка, где μ настолько близко к a_m или a_{m+1}, что разности $a_m - \mu$ и $a_{m+1} - \mu$ становятся соизмеримыми с ν', происходит очень быстрый переход от $k = \frac{\pi}{4\nu_0}f_m(\mu)$ к $k = 0$, совершенно так, как в пунктирном прямоугольнике фиг. 1. Эти узкие области тем у́же, чем меньше ν', и при исчезающем ν' точно воспроизводится фигура трапеции $a_m\,A_m\,A_{m+1}\,a_{m+1}$, умноженная на $\frac{\pi}{4\nu_0}$. Так как мы рассматриваем ряд отрезков, примыкающих друг к другу, то крутой скачок вниз в конце отрезка m при точке a_{m+1} компенсируется крутым подъемом вверх в той же точке для отрезка $m+1$. Отрезок кривой

$$k = \frac{\pi}{4\nu_0}f_m(\mu)$$

без разрыва перейдет в отрезок

$$k = \frac{\pi}{4\nu_0}f_{m+1}(\mu).$$

Разрыв производной повторится с полной остротой при $\nu' = 0$ и скруглится в узкой области при ν' очень малом.

Если мы приняли заранее, что ν' исчезающе мало, то экспериментальная кривая k дает непосредственно кривую, пропорциональную кривой распределения плотностей. Можно было бы и не делить эту кривую на прямолинейные отрезки, так как k всегда точно воспроизводит функцию распределения плотности, если $\nu' = 0$, но это нужно сделать для вычисления $n-1$. Как и с какой точностью разбить экспериментальную кривую k на прямолинейные отрезки, в каждом отдельном случае покажут вид кривой и точность измерений.

Таким образом:

$$k = \frac{\pi}{4\nu_0} f_m(\mu) \text{ для } a_m \leqslant \mu \leqslant a_{m+1} \tag{10}$$

и аналогично для других отрезков.

Переходим к кривой $n-1$, которая для того же m-го отрезка представится в виде следующей формулы при той же подстановке и после интегрирования:

$$n - 1 = -\frac{1}{\nu_0}\int\limits_{a_m}^{a_{m+1}} \frac{(\mu - x) f_m(x)\, dx}{4(\mu - x)^2 + \nu'^2} = \frac{1}{4\nu_0} \int\limits_{\frac{2(a_m-\mu)}{\nu'}}^{\frac{2(a_{m+1}-\mu)}{\nu'}} \frac{z f_m(\mu) + \frac{z^2\nu'}{2} f_m'}{1+z^2}\, dz =$$

$$= \frac{1}{4\nu_0}\left\{\frac{f_m(\mu)}{2} \lg \frac{\nu'^2 + 4(a_{m+1}-\mu)^2}{\nu'^2 + 4(a_m-\mu)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu'}{2} f_m' \left[\frac{2(a_{m+1}-a_m)}{\nu'} - \operatorname{arctg} \frac{2(a_{m+1}-\mu)}{\nu'} + \operatorname{arc\,tg} \frac{2(a_m-\mu)}{\nu'}\right]\right\}.$$

Здесь от члена с множителем f_m' остается при $\nu' \to 0$ постоянный член:

$$f_m'(a_{m+1} - a_m) = A_{m+1} - A_m.$$

Но для ряда отрезков кривых, как на фиг. 3, где первый начинается, а последний кончается на ординате нуль, получим:

$$\sum (A_{m+1} - A_m) = 0.$$

В члене с множителем $f_m(\mu)$ нельзя положить $\nu' = 0$ для отдельного отрезка, так как $n-1$ будет превращаться в $\pm\infty$ для $\mu = a_m$ и $\mu = a_{m+1}$. Но для двух соседних отрезков, пересекающихся в точке a_m, например,

$$f_{m-1}(\mu) = A_m + (\mu - a_m) f'_{m-1}$$

и

$$f_m(\mu) = A_m + (\mu - a_m) f_m',$$

не будет разрыва в точке $\mu = a_m$, так как сумма двух интегралов даст слагаемое:

$$[f_{m-1}(\mu) - f_m(\mu)] \lg [\nu'^2 + 4(a_m - \mu)^2] =$$
$$= (\mu - a_m)(f'_{m-1} - f_m') \lg [\nu'^2 + 4(a_m - \mu)^2],$$

которое и при $\nu' = 0$ обратится в нуль, когда $\mu = a_m$.

Поэтому можно написать прямо для полного ряда отрезков:

$$n - 1 = \frac{1}{4\nu_0} \sum_m f_m(\mu) \lg \left| \frac{a_{m+1} - \mu}{a_m - \mu} \right| =$$
$$= \frac{1}{4\nu_0} \sum_m (f'_{m+1} - f'_m)(\mu - a_m) \lg |\mu - a_m|, \tag{11}$$

где под знаком lg нужно брать абсолютную величину выражения. В дальнейшем мы это всегда будем предполагать, не отмечая особым знаком. Производная от $n - 1$, равная

$$\frac{1}{4\nu_0} \sum_m (f'_{m-1} - f_m') \lg (x - a_m),$$

на местах перелома, образованных отрезками кривой поглощения, также обращается в $\pm \infty$, но это обстоятельство не проявится с отчетливостью в дальнейших примерах, и точки перелома нельзя резко отметить на кривых дисперсии. Формулу (11) можно было бы легче получить, просто зачеркнув ν'^2 в интеграле, но тогда утратилось бы представление, как стремится к пределу $n - 1$ при $\nu' \to 0$, и кроме того пришлось бы отдельно доказывать, что под lg нужно всегда брать абсолютную величину.

Выведенные формулы можно было бы применить к проверке связи между поглощением и дисперсией, которая одинаково устанавливается всеми теориями, начиная от теории Гельмгольца и кончая теориями Лоренца и Планка, для случая очень малого ν'. К этой же связи приведет вероятно и квантовая теория дисперсии. Можно было бы стать на такую точку зрения: затухания различных вибраторов хотя и различны, но тем не менее все исчезающе малы; можно ли, исходя от этой гипотезы, из кривой поглощения предвычислить кривую дисперсии. Во всяком случае, решение такой задачи интереснее, чем разложение кривых поглощения и дисперсии на конечное число отдельных вибраторов и подбор их констант, с целью удовлетворить одновременно обеим кривым, как это делали многие исследова-

тели. Подобную задачу с разложением на прямолинейные отрезки кривой поглощения поставил и решил С. И. Вавилов[1] на конкретном материале кривых поглощения и дисперсии водных растворов красок Rosa Bengale и Eosin, полученных Ван-дер-Плаатсом и Сёдерборгом.[2]

С. И. Вавилов пользовался не точными формулами, а приближенными, подобными тем, которые были выведены выше, но несколько более сложными, так как была принята иная формула приближения. Как было указано выше, приближение заключается в том, что частота (или длина волны) принимается постоянной, если она не входит в разность двух близких величин. Но и в таком приближении кривые дисперсии, вычисленные из кривых поглощения, прекрасно совпали с экспериментальными кривыми, гораздо лучше, чем вычисления упомянутых авторов, которые разлагали полосу на небольшое число отдельных полос. Этим подтверждается предположение, что широкие полосы составлены из таких линий. У С. И. Вавилова небольшое расхождение получается лишь на краях кривой дисперсии, и его можно приписать тем пренебрежениям, которые были сделаны при выводе формул. Но при затрате такого же вычислительного труда можно применить и точные формулы. Так как этот пересчет было бы интересно сделать и определить, до какой же степени точности можно вычислять дисперсию из поглощения, то здесь будут приведены без вывода точные формулы.

В этом случае нужно исходить не из величины k, а из ее произведения на частоту $k\nu$. Как и выше для k, можно доказать, что для отрезка прямой, представляющей распределение плотности вибраторов по частотам ν_0 и равной $f_m(\nu_0)$ при $a_m < \nu < a_{m+1}$, а вне этого промежутка равной нулю, величина

$$k\nu = \frac{1}{2}\int\limits_{a_m}^{a_{m+1}} \frac{\nu'\,\nu^2 f_m(\nu_0)\,d\nu_0}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu'^2\,\nu^2}$$

равна $\frac{\pi}{4} f_m(\nu)$ внутри отрезка и нулю вне его при $\nu' \to 0$. Если же возьмем все отрезки, то разрыв функции на краях отдельных отрезков исчезает, и $k\nu$ воспроизводит точно ломаную линию. Далее, построив экспериментальную

[1] С. Вавилов. Природа широких полос поглощения в видимом спектре. Известия Физического института при Московском Научном институте (под ред. П. П. Лазарева), т. II, 94—115, ГИЗ, Москва, 1922.

[2] J. Van der Plaats. Ann. d. Phys. **47**, 429, 1915; B. Söderborg. Arkiv för Matematik, Astronomy och Physik **9**, № 7, 1913.

кривую $k\nu$ и разбив ее на отрезки, ищем формулу для вычисления дисперсии:

$$n^2 - 1 = \sum_m \int_{a_m}^{a_{m+1}} \frac{(\nu_0^2 - \nu^2) f_m(\nu_0)\, d\nu_0}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu'^2 \nu^2} =$$

$$= \frac{1}{2\nu} \sum_m (f'_{m-1} - f_m') [(\nu - a_m) \lg (\nu - a_m) + (\nu + a_m) \lg (\nu + a_m)]$$

при $\nu' \to 0$, что легко получить, просто положив под интегралом $\nu' = 0$. Здесь f_m' имеет то же значение, как и выше, а под знаком lg нужно по прежнему брать абсолютную величину. Эти формулы отличаются от прежних немногим. Они исходят из точных формул поглощения и дисперсии, которые фигурируют под знаками интегралов, относятся к одной полосе поглощения и к не очень сильному поглощению, иначе нужно взять функции $nk\nu$ и $n^2 - k^2 - 1$. Отличие для $n^2 - 1$ заключается в переменном множителе $\frac{1}{2\nu}$ перед суммой и в поправочных членах с множителями $(\nu + a_m) \lg (\nu + a_m)$. Всю сумму поправочных членов можно привести в первом приближении к виду

$$\frac{1}{2\nu} \sum_m A_m \frac{a_{m+1} - a_m}{\nu + a_m},$$

где, как выше, A_m — ордината, соответствующая точке пересечения отрезков a_m, а очень малый множитель

$$\frac{a_{m+1} - a_m}{\nu + a_m}$$

указывает на малую величину поправки. Формула для $n^2 - 1$ очень удобна для вычислений, если предварительно построить таблицу значений функций $x \lg x$. Она очень близка к формуле С. И. Вавилова,[1] но последняя выражена не в частотах, а в длинах волн и потому является только приближенной.

Но даже самые точные вычисления не могут окончательно доказать в случае расплывчатых широких полос, что они действительно составлены из тонких линий. Разлагая полосу поглощения на достаточное число более узких, но все же не совсем узких полос, можно ввести в вычисления достаточное число параметров, чтобы с произвольной точностью воспроизвести обе кривые поглощения и дисперсии. Ниже будет указан случай, когда этого сделать нельзя и когда гипотеза о тонкости составляющих является необходимой.

[1] L. c. 101.

7. Вернемся к треугольному распределению плотности вибраторов и сравнению его с распределением плотности по закону

$$\frac{\rho c}{\pi (c^2 + x_2)}.$$

Во втором случае по общему правилу мы получим:

$$k = \frac{\rho c}{4\nu_0 (\mu^2 + c^2)}, \tag{12}$$

т. е. формулу (8), в которой положено $2b + \nu' = 2c$. Формулу (7) даст при том же условии:

$$n - 1 = -\frac{\rho\mu}{4\nu_0 (\mu^2 + c^2)}. \tag{13}$$

В случае плотности треугольником (9) кривая поглощения, согласно (10), будет:

$$k = \frac{\pi\rho_1}{8\nu_0 c}\left(1 + \frac{\mu}{2c}\right) \text{ от } \mu = -2c \text{ до } \mu = 0$$

и (14)

$$k = \frac{\pi\rho_1}{8\nu_0 c}\left(1 - \frac{\mu}{2c}\right) \text{ от } \mu = 0 \text{ до } \mu = 2c.$$

Кривая дисперсии $n - 1$ легко получится из применения к этому частному случаю общей формулы (11). Мы имеем три вершины при абсциссах $a_1 = -2c$, $a_2 = 0$, $a_3 = +2c$. Легко видеть, что:

$$f_0' = f_3' = 0,\ f_1' = -f_2' = \frac{\rho_1}{16\nu_0 c^2}.$$

Отсюда:

$$n - 1 = \frac{\rho_1}{16\nu_0 c^2}[-(\mu + 2c)\lg(\mu + 2c) + \\ + 2\mu \lg \mu - (\mu - 2c)\lg(\mu - 2c)]. \tag{15}$$

Как уже сказано, масштаб абсцисс $2c = 1$, а масштабы ординат выберем так, что

$$\frac{\rho}{4\nu_0 c} = \frac{\pi\rho_1}{8\nu_0 c} = 5.$$

Тогда, во-первых, кривые (12) и (13) совпадут с кривыми поглощения и дисперсии I фиг. 1, и, во-вторых, (12) совпадет с кривой плотности Ik фиг. 2. Кривая дисперсии (13) еще раз воспроизведена на фиг. 2 с отметкой I. Далее треугольник (14) совпадет с треугольником плотности IIIk

фиг. 2. Наконец, на фиг. 2 нанесена кривая (15) с отметкой III n—1. Легко найти, что в (15) $n-1$ имеет максимальное и минимальное значение при

$$\mu = \pm c\sqrt{2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

и тогда $n_m - 1 = 2.812$. При этом значении μ коэффициент поглощения $k = 1.465$. Видимость аномальной дисперсии

$$\frac{n_m - 1}{k} = 1.92$$

возрастает почти в 2 раза по сравнению с видимостью в простых полосах (1) и (2) или I фиг. 2. Величина $n_m - 1$ не только растет, но главным образом максимум сдвигается в менее поглощающую область кривой k, от $\mu = 0.5$ к $\mu = 0.707$. Очевидно, это происходит оттого, что устранены вибраторы между стороной треугольника III k и медленно опускающейся к оси абсцисс кривой плотности I k в заштрихованной части.

Теперь достаточно ясно, что повышение видимости дисперсии есть следствие более крутого спуска кривой поглощения, а следовательно, и кривой плотности.

8. В одном случае М. М. Глаголев наблюдал ход дисперсии, который с необходимостью приводит к гипотезе о чрезвычайно малом коэффициенте затухания ν'. Стекло, окрашенное фосфорными соединениями урана (Uranphosphatglass), имеет полосу поглощения с чрезвычайно резким краем с одной стороны и очень расплывчатым — с другой. Соответственно кривая дисперсии имеет очень резкий рог с первой стороны, и почти никакой дисперсии не видно — интерференционная полоса почти не смещается — внутри полосы. Легко имитировать эту полосу двумя отрезками кривых, как на фиг. 4.

Пусть левая сторона треугольника дает подъем в 500 раз круче, чем правая, иначе говоря,

$$a_1 = -\frac{2c}{500}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 2c.$$

Если площадь треугольника равна ρ_2, то вершина треугольника

$$A_2 = \frac{500\rho_2}{501c},$$

и отрезки прямых, образующих стороны треугольника, будут:

$$f_1(x) = A_2\left(1 + \frac{500x}{2c}\right) \text{ от } x = -\frac{2c}{500} \text{ до } x = 0$$

и

$$f_2(x) = A_2\left(1 - \frac{x}{2c}\right) \text{ от } x = 0 \text{ до } x = 2c.$$

Коэффициент поглощения, согласно (10), получится:

$$k = \frac{\pi}{4\nu_0} A_2 \left(1 + \frac{500\mu}{2c}\right) \text{ от } \mu = -\frac{2c}{500} \text{ до } \mu = 0$$

и

$$k = \frac{\pi}{4\nu_0} A_2 \left(1 - \frac{\mu}{2c}\right) \text{ от } \mu = 0 \text{ до } \mu = 2c.$$

Далее:

$$f_0' = f_3' = 0; \quad f_1' = \frac{500}{2c} A_2, \; f_2' = -\frac{A_2}{2c},$$

и отсюда, согласно (11):

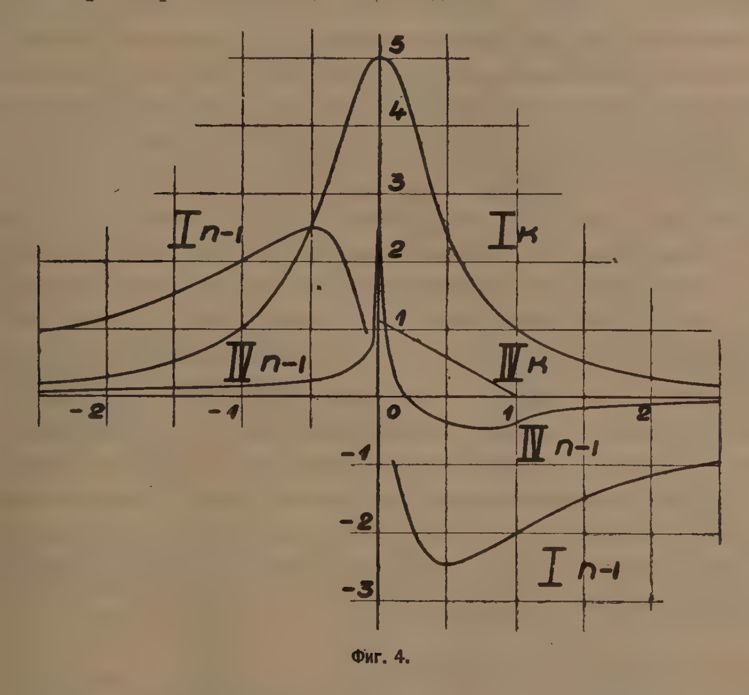
$$n - 1 = \frac{A_2}{8\nu_0 c}\left[-500\left(\mu + \frac{2c}{500}\right)\lg\left(\mu + \frac{2c}{500}\right) + \right.$$
$$\left. + 501\mu \lg \mu - (\mu - 2c)\lg(\mu - 2c)\right].$$

Как и раньше, принимаем масштаб абсцисс $2c = 1$ и одинаковый масштаб для k и $f(x)$, так что треугольник фиг. 4 изображает не только распределение плотности, но и кривую поглощения. Далее вычисление показывает, что положительный максимум $n_m - 1$ получается для $\mu = -0.001$ и при этом выражение в квадратных скобках принимает значение 6.90. Выбираем такую величину ρ_2, чтобы $n_m - 1 = 2.50$, как в кривых Ik. Тогда $A_2 = 1.14$, и на фиг. 4 получаются кривые IV для k и $n - 1$, которые изображают наблюдавшиеся характерные кривые дисперсии и поглощения в указанном стекле. Кривая поглощения обрывается настолько круто, что левая сторона треугольника кажется вертикальной, и этому соответствует резкий рог аномальной дисперсии, по вышине равный подъему кривой дисперсии I$(n - 1)$ фиг. 4, соответствующий распределению плотности по закону $\frac{\rho c}{\pi(c^2 + x^2)}$. Обе кривые I фиг. 4 (поглощение и дисперсия) перенесены с фиг. 2 для сравнения. Так как кривая поглощения Ik фиг. 4 дает одновременно и распределение плотности, а ее площадь дает ρ_1, пропорциональное общему числу вибраторов, то из сравнения ее площади с площадью ρ_2 треугольника IVk видно, что общее число вибраторов стало в 13.8 раз меньше. И тем не менее максимумы $n_m - 1$ равны, потому что вершина максимума кривой дисперсии IV $n - 1$ обусловливается главным образом резкостью обрыва поглощения. Наоборот, минимум $n_m - 1$ кривой IV $n - 1$ стал приблизительно в 5 раз меньше минимума кри-

вой I $n-1$ и практически едва заметен. Говорить о видимости дисперсии здесь трудно. По вычислению

$$\frac{n_m-1}{k}=\frac{2.5}{0.57}=4.4,$$

но практически поглощение так быстро растет, что правильнее взять максимальное, вдвое большее k. Все же и тогда видимость дисперсии равна 2.2, т. е. в два раза происходит видимость в одиночной полосе.



Фиг. 4.

Описанная резкая картина дисперсии прекрасно наблюдается в спектроскопах с большой разрешающей силой, если на пути одного луча в интерферометре введены пары, дающие молекулярные спектры поглощения, — полосы с резким краем. При большой дисперсии, когда разрешены отдельные линии полосы, видно, как образуется кривая дисперсии типа фиг. 4 из отдельных кривых, изгибающихся около каждой резкой линии, входящей в состав полосы. При меньшей дисперсии, когда отдельные линии неразличимы, видно нечто вроде кривой IV $n-1$. В сущности, правильнее было бы считать полрсу поглощения в фосфорно-урановом стекле именно такой молекулярной полосой, оборвать кривую плотности IV с левой стороны строго вертикальным ходом вниз, но приписать вибраторам некоторый чрез-

вычайно малый коэффициент затухания ν'. Кривая дисперсии будет иметь приблизительно тот же вид. Ее легко можно было бы вычислить, но она не даст по существу ничего нового.

Однако, резкий обрыв поглощения с несомненностью говорит о малом коэффициенте затухания. Полосу поглощения с резким краем нельзя никаким образом разложить на сравнительно широкие, симметрические, соответствующие вибраторам с большим ν', отдельные полосы, как можно сделать с полосой поглощения в обе стороны расплывчатой. Этот довод вполне аналогичен тем доводам, которые приводит Т. П. Кравец, доказывая сложность полос. У него экспериментальная кривая поглощения на краю опускается к оси абсцисс гораздо ниже, чем опускается вычисленная кривая с ν', соответствующим полуширине экспериментальной кривой. Низкую (на краях) кривую нельзя сложить из высоких кривых, а следовательно, степень «низкости» определяет меру сложности полосы и дает верхний предел для ν' простых полос, из которых складывается экспериментальная. Точно так же в рассматриваемом случае резко оборванной полосы степень резкости обрыва поглощения должна дать верхний предел для коэффициента ν'. Равным образом должна дать этот предел и резкость максимума дисперсии. Вычисления С. И. Вавилова в особенности интересно было бы применить именно к подобным полосам. К сожалению, пока нет экспериментального материала, так как наблюдения М. М. Глаголева были чисто качественные.

В результате ясно, что противоречащая теории бо́льшая видимость дисперсии в широких полосах поглощения вполне объясняется сложностью этих полос. Они построены из ряда более узких полос, соответствующих вибраторам с малым затуханием.

Государственный оптический институт.
Сектор спектроскопии.

D. ROŽDESTVENSKIJ. ANOMALE DISPERSION IN BREITEN ABSORBTIONSSTREIFEN

ZUSAMMENFASSUNG

Breite Absorptionsstreifen können entweder durch Oszillatoren mit einer bestimmter Eigenfrequenz und grosser Dämpfungskonstante oder durch eine Reihe von Oszillatoren mit variabler Eigenfrequenz und kleiner Dämpfungskonstante bedingt werden. Ein Beispiel letzteres würde eine Molekülbande, in welcher einzelne dicht stehende Linien durch geringe Verbreiterung zusammenfliessen, geben.

Der Gang der anomalen Dispersion in breiten Streifen, nach der Interferenzmethode von Puccianti beobachtet, wird in beiden Fällen verschieden sein. Bei Oszillatoren mit bestimmter Eigenfrequenz besteht bei beliebiger Dämpfungskonstante eine natürliche Beobachtungsgrenze, nach welcher bei Einführung des absorbierenden Körpers in Form einer planparallelen Platte in den Gang eines der interferierenden Strahlen die Verschiebung der Interferenzstreifen im Maximum resp. Minimum der Dispersionskurve ca $^1/_3$ Streifenbreite nicht übersteigen kann. Sonst wird der Strahl bei grösserer Dicke der Platte durch Absorption so sehr geschwächt, dass die Interferenzstreifen verblassen und unsichtbar werden. Dagegen kann bei gleich breitem Absorptionsstreifen die Oszillatorendichte solch eine Funktion der Frequenz sein, dass die Sichtbarkeit der Dispersionskurve bei der Interferenzmethode um das zwei- oder dreifache steigt. Wenn man also mit dem Interferometer eine Dispersionskurve mit gut ausgebildeten Maximum und Minimum grösser, als $^1/_3$ Streifenbreite sieht, so kann man ohne weiteres auf eine Komplexität des Absorptionsstreifens schliessen. So besteht es mit den Absorptionsstreifen in Lösungen von Salzen der seltenen Erden.

Es werden verschiedene Funktionen der Oszillatorendichte betrachtet, entsprechende Dispersionskurven berechnet und deren Sichtbarkeit in Extremalpunkten bestimmt. Dabei werden die Dämpfungskonstanten als verschwindend klein angenommen. In diesem Fall, welcher wahrscheinlich oft der Wirklichkeit entspricht, ist es möglich aus der gemessenen Form der Absorptionskurve direkt die Dispersionskurve zu berechnen, wenn man die Absorptionskurve in beliebig weit gehender Annäherung als eine Reihe von Geraden (Fig. 3) betrachtet. Wenn k (k — Absorptionskoeffizient, ν — Frequenz) durch Geraden so, wie in Fig. 3 dargestellt wird, und f (a_m) seine entsprechende Ordinaten sind, so wird $n^2 - 1$ durch die Summenformel auf Seite 51 als Funktion der Frequenz gegeben. Dabei ist f'_m die Neigungstangente der Geraden $A_m A_{m+1}$. Eine ähnliche Formel wurde von S. Wawiloff zur Berechnung der experimentellen Dispersionskurven aus Absorptionskurven gebraucht. Hier aber wird die betreffende Formel genauer entwickelt. Mit diesen Formeln wird die anomale Dispersion IV $n-1$ (Fig. 4), welche einem einseitig scharf begrenzten Streifen IV k entspricht berechnet. Ein ähnlicher Fall der Dispersion wurde qualitativ von M. Glagoleff am Uranphosphatglass beobachtet. In diesem Fall ist es sogar möglich eine obere Grenze der Dämpfungskonstante zu berechnen.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ОБ ЭНЕРГИИ, ИЗЛУЧАЕМОЙ ПРОЗРАЧНЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ ТЕЛОМ

А. М. ТИТОВА

(*Представлено академиком* **А. Н. Крыловым**)

§ 1. Некоторые общие замечания

Задачей настоящей работы является введение в закон излучения Кирхгоффа[1] геометрических элементов в явном виде и в возможно более общей форме. Поясним эту мысль. Излучение тела зависит не только от рода вещества тела, состояния его поверхности и от его температуры, но также от геометрической формы и размеров тела, если тело является прозрачным для некоторых областей спектра. Термин прозрачное тело является до некоторой степени условным. Говорят о прозрачных тонких пластинках металлов и т. д. Очевидно, придется в общем случае предположить, что прозрачное для данного рода лучей тело имеет конечный коэффициент поглощения, отличный от нуля, и геометрические размеры тела таковы, что при падении данного рода лучей не слишком малая часть энергии выходит наружу.

Введение геометрических элементов в выражение закона Кирхгоффа или, говоря иначе, нахождение общего метода вычисления энергии, излучаемой геометрически ограниченным телом представляет значительный интерес для некоторых проблем, выдвигаемых в прикладных научных дисциплинах, например: излучение стеклянной пластинки в гелиотехнике, излучение воды в мелкораздробленном состоянии (капелек тумана) в метеорологии и т. д.

Проблема излучения ограниченных объемов газов, интересующая теплотехнику, в значительной мере разрешена работами А. Шака[2] и В. Нуссельта.[3] Отметим, однако, что излучение твердых и жидких тел,

[1] G. Kirchhoff. Gesammelte Abhandlungen, p. 574, 1882.
[2] A. Schack. Ztschr. f. techn. Phys., 1924, H. 6.
[3] W. Nusselt. Mitt. Forsch.-Arb., H. 264.

ограниченных размеров представляет значительно большие трудности, нежели излучение газов, так как в этом случае приходится иметь дело с величиной коэффициента отражения, отличной от нуля, и с явлением многократных отражений.

Все изложенное в дальнейшем будет относиться к излучению изотропного однородного тела, находящегося в состоянии термодинамического равновесия.

В предыдущей работе[1] нами было дано уточнение понятия о лучепоглощательных и лучеиспускательных способностях тела. В дальнейшем изложении воспользуемся выражениями закона Кирхгоффа, приведенными в предыдущей работе:

$$(1)\qquad \frac{e_\nu}{a_\nu} = 2\,\mathfrak{K}_\nu \cos\vartheta; \qquad \frac{E_\nu}{A_\nu} = 2\pi\,\mathfrak{K}_\nu \qquad (3)$$

$$(2)\qquad \frac{e}{a} = K\cos\vartheta; \qquad \frac{E}{A} = \pi K \qquad (4)$$

где:

$\mathfrak{K}_\nu$ — удельная интенсивность равновесного поляризованного излучения частоты ν. Можно считать величину $\mathfrak{K}_\nu$ данной формулой М. Планка.[2]

K — в зависимости от абсолютной температуры тела определяется законом Стефана-Больцмана.[3]

a_ν — лучепоглощательная способность тела для неполяризованных лучей частоты ν, падающих на тело под углом ϑ.

a — лучепоглощательная способность для равновесного неполяризованного излучения, падающего под углом ϑ.

Спектральный состав равновесного излучения должен соответствовать температуре тела.

A_ν — лучепоглощательная способность тела для неполяризованных лучей частоты ν, падающих на элемент поверхности внутри угла 2π с интенсивностью, независящей от направления.

A — лучепоглощательная способность тела для равновесного неполяризованного излучения с соответствующим температуре тела спектральным составом, падающего внутри телесного угла 2π на элемент поверхности тела.

e_ν, e, и E_ν, E суть соответствующие лучеиспускательные способности, или иначе — энергии, испускаемые единицей поверхности тела в еди-

[1] А. М. Титов. Изв. Акад. Наук СССР, стр. 623, 1931.

[2] M. Planck. Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, pp. 180, 37, 1921.

[3] Stefan. Wiener Berichte, Bd. 79, p. 391, 1879. — L. Boltzmann. Wiedemann's Annalen Bd. 22, p. 291, 1884.

ницу времени соответственно в данном направлении под углом ϑ и внутри телесного угла 2π, причем величины e и E относятся к полному излучению всех частот с их родами поляризации, соответствующими температуре T тела. Индекс ν относится к излучению только одной частоты с соответствующим состоянием поляризации.

Необходимо отметить, что вышеприведенные выражения (1), (2), (3) и (4) закона Кирхгоффа применимы также и к геометрически ограниченному прозрачному телу, и что в отношении состояния поверхности тела не вводится каких-либо ограничительных предположений.

Если принять коэффициент отражения от поверхности тела лучистой энергии не зависящим от ее интенсивности (по крайней мере, в достаточно широком интервале значений), то в случае среды, ограниченной плоскостью и простирающейся достаточно далеко во всех других направлениях, будем иметь, что величины a_ν и A_ν не зависят от интенсивности падающего на тело потока лучистой энергии.

В случае тела ограниченных размеров вообще необходимо было бы еще оговорить для аналогичного утверждения и независимость коэффициента поглощения от интенсивности потока энергии (что, конечно, имеет место в широком интервале значений интенсивности). Независимость величины A_ν от интенсивности падающего на тело потока была показана мною в одной из предыдущих работ.[1]

Применение высказанного положения к величине a, определяемой как того требует закон Кирхгоффа, не имеет смысла, ибо в этом случае спектральный состав и интенсивность падающей равновесной радиации обусловливаются температурой тела.

В дальнейшем изложении мы введем более общее понятие о лучепоглощательной способности тела.

Примем еще во внимание нижеследующие зависимости:[2]

$$E_\nu = 2\pi \mathfrak{K}_\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_\nu \sin 2\vartheta \, d\vartheta; \tag{5}$$

$$E = 2\pi \int_0^\infty d\nu \, \mathfrak{K}_\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_\nu \sin 2\vartheta \, d\vartheta \tag{6}$$

[1] А. М. Титов. Гелиоэнергетика, сборник исследовательских работ Узбекского гидрометеорологического института, стр. 55, 1933.

[2] А. М. Титов. Изв. Акад Наук СССР, стр. 623, 1931.

Отметим, что эти зависимости выражают излучаемую энергию вообще только в том частном случае, когда тело ограничено плоскостью и простирается во всех других направлениях достаточно далеко. В отношении состояния поверхности тела в формулах (5) и (6) не вводится каких-либо ограничительных предположений.

§ 2. Зависимости между некоторыми оптическими величинами, характеризующими тело в данной точке поверхности

Введем понятие об оптических величинах, характеризующих тело в данной точке поверхности.

Рассмотрим падение лучей на прозрачное геометрически ограниченное тело.

Пусть на некоторую площадку $d\sigma$ на поверхности этого тела падает под углом ϑ с нормалью в точке падения внутри телесного угла $d\Omega$ поток лучистой энергии любого спектрального состава и любого состояния поляризации для каждого его компонента.

В теле поток будет претерпевать многократные отражения. При каждом отражении от различных частей поверхности тела часть энергии потока будет выходить наружу.

Сумма всех потоков, вышедших из тела плюс поток, отраженный поверхностью при падении, дает нам часть энергии, вышедшую и отброшенную телом. Эту величину мы будем обозначать через b и назовем «коэффициентом выхода для потока лучистой энергии данного спектрального состава и направления, падающего в данной точке поверхности».

Часть энергии падающего потока, поглощенную телом, обозначим через a, и соответственно назовем «лучепоглощательной способностью тела для потока данного спектрального состава и направления, падающего в данной точке поверхности».

Между величинами a и b существует очевидная зависимость.

$$a + b = 1 \tag{7}$$

Далее введем понятия о коэффициенте выхода и лучепоглощательной способности для падающей в данной точке поверхности тела диффузной радиации любого спектрального состава и состояния поляризации. Пусть на элемент поверхности тела $d\sigma$ внутри телесного угла Ω по всевозможным направлениям падают потоки радиации. Тогда часть всей падающей энергии, поглощенную телом, мы будем называть «лучепоглощательной способностью тела для данной диффузной радиации, падающей в данной точке поверх-

ности тела внутри заданного телесного угла Ω» и обозначим се величину через A. Часть энергии падающего диффузного потока, вышедшую после многократных отражений из тела, плюс отраженная при падении часть энергии, будем называть «коэффициентом выхода для данной диффузной радиации, падающей в данной точке поверхности внутри заданного телесного угла Ω», и обозначим ее величину через B.

Имеем очевидное равенство:

$$A+B=1 \tag{8}$$

В некоторых случаях геометрической симметрии тела, когда точки поверхности тела являются геометрически равноценными, величины a, b, A и B можно назвать оптическими константами прозрачного тела для данной радиации прямой и диффузной.

Обращаемся к вопросу о зависимости величин A и B от величин a и b.

Рассмотрим поток диффузной радиации, падающей на элемент $d\sigma$ поверхности тела внутри телесного угла Ω. Обозначим через e интенсивность потока лучистой энергии, падающего в данном направлении под углом ϑ на элемент поверхности $d\sigma$.

Интенсивность e потока и его спектральный состав для разных направлений вообще говоря, могут быть различны.

Тогда

$$e\cos\vartheta\, d\Omega\, d\sigma \tag{9}$$

будет выражать количество энергии, падающей внутри телесного угла $d\Omega$ в данном направлении в единицу времени на элемент поверхности $d\sigma$. Энергия, выходящая (в смысле определения коэффициента выхода), и поглощенная телом из потока радиации данного направления найдутся умножением выражения (9) соответственно на b и a.

Выражения

$$\int_\Omega d\Omega\, e\cos\vartheta\, d\sigma \quad \text{и} \quad \int_\Omega d\Omega\, ae\cos\vartheta\, d\sigma$$

будут обозначать соответственно величины падающей и поглощенной диффузной радиации. Очевидно, лучепоглощательная способность тела для данной диффузной радиации, падающей в данной точке поверхности тела внутри заданного телесного угла Ω найдется следующим образом:

$$A=\frac{\int_\Omega d\Omega\, ae\cos\vartheta\, d\sigma}{\int_\Omega d\Omega\, e\cos\vartheta\, d\sigma} \tag{10}$$

Для величины B получится аналогичная формула с заменой a соответственно на b.

В том частном случае, который имеет наибольший практический интерес, именно когда интенсивность e падающих потоков по всем направлениям одинакова и $\Omega = 2\pi$, формула (10) значительно упрощается.

Введем координаты ϑ и φ. Принимая во внимание, что

$$d\Omega = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

для A получаем:

$$A = \frac{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\vartheta . a \, e \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\sigma}{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\vartheta \, e \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\sigma}.$$

Принимая e постоянным, произведя в знаменателе интегрирование по φ и заметив, что

$$\int\limits_0^{\pi/2} d\vartheta \sin\vartheta \cos\vartheta = \frac{1}{2}$$

для A будем иметь выражение:

$$A = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} a \sin 2\vartheta \, d\vartheta \tag{11}$$

и для B аналогично

$$B = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} b \sin 2\vartheta \, d\vartheta \tag{12}$$

Полученные нами формулы (11) и (12) относятся к падающей радиации любого спектрального состава и состояния поляризации.

В том случае, когда мы имеем неполяризованную падающую радиацию, мы можем величины A и B выразить через соответствующие величины для поляризованных компонентов. Не трудно видеть, что

$$a = \frac{a_{\parallel} + a_{\perp}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{13}$$

где $a_{\parallel}$ и $a_{\perp}$ лучепоглощательные способности для падающих лучей данного направления, поляризованных соответственно параллельно и перпендикулярно плоскости падения.

Лучепоглощательные способности, определяемые в смысле закона Кирхгоффа, являются частным случаем введенных нами более общих понятий лучепоглощательных способностей в данной точке.

Отметим, что ограничение, сделанное нами при выводе формул (11) и (12) имеют также место в определениях лучепоглощательных способностей в законе Кирхгоффа, следовательно формулы (11), (12) и (13) применимы также к лучепоглощательным способностям в смысле закона Кирхгоффа.

§ 3. Общий случай геометрически ограниченного прозрачного изотропного тела

Относительно поверхности тела мы предположим, что она не имеет вогнутостей. Распространение выводов на случай любой поверхности не представляет затруднений, как это будет видно из дальнейшего изложения. Кроме того, мы предположим, что поверхность тела является правильно отражающей и что коэффициент рассеяния лучистой энергии в рассматриваемой нами спектральной области близок к нулю.

Рассмотрение случая абсолютно матовой поверхности также представляет интерес. Это рассмотрение явится темой одной из ближайших моих работ. Что же касается случая поверхности, не отражающей правильно и не абсолютно матовой, то здесь a priori можно сказать, что навряд ли возможно раскрыть общее выражение энергии для производства вычислений.

Определим первоначально коэффициент выхода для падающей в данной точке монохроматической лучистой энергии.

Пусть на элемент поверхности $d\sigma$ данного тела под углом ϑ с нормалью к поверхности падает поток неполяризованной лучистой энергии частоты ν.

Обозначим через r коэффициент отражения при падении, ψ — соответствующий угол преломления, r_1, r_2, $r_3, \ldots \vartheta_1$, $\vartheta_2, \ldots \psi_1$, $\psi_2, \ldots \gamma_1$, $\gamma_2, \ldots$ соответственно коэффициенты отражения, углы, преломления, углы падения и углы между плоскостью падения и плоскостью поляризации одного из составляющих поляризованных лучей при внутренних отражениях: первом, втором, и т. д.; s_1, s_2, $s_3, \ldots$ пути луча от точки падения O до точки первого внутреннего отражения M_1, от точки первого внутреннего отражения до точки второго внутреннего отражения M_2 и т. д. (см. чертеж фиг. 1); α — коэффициент поглощения.

Относительно углов γ_1, $\gamma_2, \ldots$ мы предположим для определенности, что отсчет их ведется от плоскости падения в данной точке внутреннего отражения до плоскости параллельно поляризованной составляющей при предыдущем отражении.

Рассматривая путь луча можно составить следующую таблицу:

$(1-r)$ — часть энергии, вошедшая в тело после падения.

$(1-r)e^{-\alpha s_1}$ — энергия, дошедшая до точки первого внутреннего отражения.

$(1-r)(1-r_1)e^{-\alpha s_1}$ — энергия, вышедшая после первого отражения.

$(1-r)r_1 e^{-\alpha(s_1+s_2)}$ — энергия, дошедшая до точки второго отражения.

$(1-r)r_1(1-r_2)e^{-\alpha(s_1+s_2)}$ — энергия, вышедшая после второго отражения и т. д.

Суммируя энергию, выходящую наружу после последовательных внутренних отражений, и отраженную вначале при падении, мы получим коэффициент выхода энергии:

$$b = r + (1-r)(1-r_1)e^{-\alpha s_1} + (1-r)r_1(1-r_2)e^{-\alpha(s_1+s_2)} + \\ + (1-r)r_1 r_2(1-r_3)e^{-\alpha(s_1+s_2+s_3)} + \ldots + \\ + (1-r)r_1 r_2 \ldots r_{m-1}(1-r_m)e^{-\alpha(s_1+s_2+\ldots+s_m)} + \ldots;$$

и, следовательно, для величины a будем иметь

$$a = (1-r)\left[1-(1-r_1)e^{-\alpha s_1} - r_1(1-r_2)e^{-\alpha(s_1+s_2)} + \ldots \right. \\ \left. \ldots - r_1 r_2 \ldots r_{m-1}(1-r_m)e^{-\alpha\sum\limits_{i=1}^{m} s_i}\right] \qquad (14)$$

Обращаемся к определению величин s_1, s_2, s_3 . . . и r, r_1 r_2, . . .

Предположим, что поверхность тела нам задана уравнениями поверхностей:

$$f_1(x, y, z) = 0; \\ f_2(x, y, z) = 0; \qquad (15) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

Допустим, что нам известны те части поверхностей системы (15), которые ограничивают наше тело.

Выберем координатную систему так, чтобы ось OX была направлена по внешнему направлению нормали в точке падения O и чтобы падающий луч лежал в плоскости XOY внутри угла XOY.

В таком случае из уравнения

$$\sin\vartheta = n\sin\psi \qquad (16)$$

мы непосредственно находим угловой коэффициент $\operatorname{tg}\psi$ преломленного луча. Составляя уравнение преломленного луча, и воспользовавшись уравнением

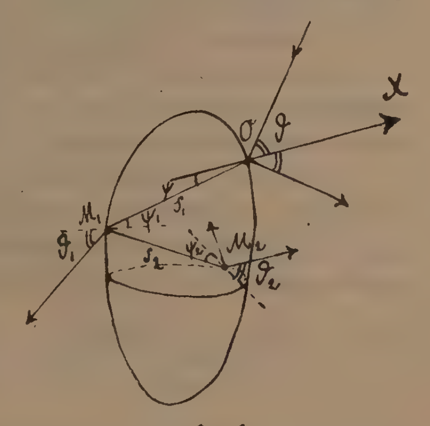
поверхностей (15), мы находим точку $M_1(x, y)$ первого внутреннего отражения, а следовательно и расстояние s_1. Те же уравнения (15) могут дать возможность определения угла ψ_1, между внутренним направлением нормали в точке M_1 и указанным преломленным лучом OM_1, а также возможность определения плоскости падения этого луча, а следовательно и уравнения луча $M_1 M_2$, идущего к точке второго отражения.

Применяя к преломлению в точке M_1 уравнение (16), можно определить ϑ_1.

Заметим, что плоскость падения луча в точке O и плоскость падения преломленного луча в точке M_1 первого внутреннего отражения определяют угол γ_1.

Аналогичными соображениями можно определить s_2, ϑ_2, ψ_2, γ_2 и т. д.

Коэффициенты отражения r, r_1, r_2, ... являются функциями показателя преломления n тела и коэффициента поглощения α и углов



Фиг. 1.

$$\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \psi, \psi_1, \psi_2, \ldots \gamma_1, \gamma_2, \ldots$$

Необходимо заметить, что состояние поляризации луча в различных точках внутренних отражений не остается постоянным.

Для определения коэффициентов r, r_1, r_2, ... можно поступить следующим образом: каждый луч разлагается на две части: поляризованную в плоскости падения в данной точке и перпендикулярно к ней. Соответственно этому в точках O, M_1, M_2, ... мы будем иметь уже коэффициенты отражения $r_{||}$, $r_{\perp}$, $r_{1||}$, $r_{1\perp}$, $r_{2||}$ ... являющиеся функциями углов

$$\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \psi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \text{ и независящие от } \gamma_1, \gamma_2, \ldots$$

В первом приближении эти коэффициенты можно считать данными формулами Френеля.[1]

Рассмотрим луч, падающий в m-ой по порядку точке внутреннего отражения с относительными интенсивностями e_m' и e_m'' параллельно и перпендикулярно поляризованных, в отношении плоскости предыдущего падения, его составляющих, причем

$$e_m' + e_m'' = 1.$$

[1] Fresnel. Oeuvres, vol. 1, pp. 441—799.

Тогда, принимая во внимание, что плоскости поляризации лучей e_m' и e_m'' с новой плоскостью падения в m-ой точке будут образовывать углы соответственно γ_m и $\gamma_m + \frac{\pi}{2}$, и разлагая лучи e_m' и e_m'' в свою очередь на составляющие, поляризованные параллельно и перпендикулярно уже в отношении плоскости падения в m-ой точке, будем иметь нижеследующие выражения для энергии:

$$(e_m' \cos^2\gamma_m + e_m'' \sin^2\gamma_m)\, r_{m\|},$$
$$(e_m' \sin^2\gamma_m + e_m'' \cos^2\gamma_m)\, r_{m\perp}$$

соответственно отраженных в данной точке лучей: поляризованного в плоскости падения, и перпендикулярно к ней.

Так как интенсивность падающей в m-ой точке энергии была принята за единицу, то коэффициент отражения r_m и относительные интенсивности e'_{m+1} и e''_{m+1} отраженных поляризованных параллельно и перпендикулярно плоскости падения лучей выразятся следующим образом:

$$r_m = (e_m' \cos^2\gamma_m + e_m'' \sin^2\gamma_m)\, r_{m\|} + (e_m' \sin^2\gamma_m + e_m'' \cos^2\gamma_m)\, r_{m\perp} \qquad (17)$$

$$e'_{m+1} = (e_m' \cos^2\gamma_m + e_m'' \sin^2\gamma_m)\, \frac{r_{m\|}}{r_m}; \qquad (18)$$

$$e''_{m+1} = (e_m' \sin^2\gamma_m + e_m'' \cos^2\gamma_m)\, \frac{r_{m\perp}}{r_m}. \qquad (19)$$

И, наконец, принимая во внимание, что

$$e_1' = \frac{1 - r_{\|}}{(1 - r_{\|}) + (1 - r_{\perp})} \qquad (20)$$

и

$$e_1'' = \frac{1 - r_{\perp}}{(1 - r_{\|}) + (1 - r_{\perp})}; \qquad (21)$$

отмечаем, что формулы (17), (18), (19), (20) и (21) дают метод составления выражений для коэффициентов $r_1, r_2, r_3, \ldots$

Принимая во внимание далее формулы (3), (11) и (14) для энергии частоты ν, излучаемой единицей поверхности будем иметь выражение:

$$E_\nu = \mathfrak{K}_\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} (1 - r) \left[1 - \sum_{i=1}^{i=\infty} r_1 r_2 \ldots r_{(i-1)} (1 - r_i)\, e^{-\alpha \sum_{i=1}^{i} s_i} \right] \sin 2\vartheta \, d\vartheta. \qquad (22)$$

Замечая, что

$$E = \int_0^\infty E_\nu \, d\nu,$$

интегрированием выражения (22) по ν можно получить полную энергию, излучаемую телом.

Нетрудно видеть, что в частном случае среды, ограниченной плоскостью, и простирающейся достаточно далеко во всех других направлениях, формула (22) переходит в полученную нами в предыдущей работе для этого частного случая формулу (5).

Для тех точек поверхности тела, в которых плоскость любого главного сечения содержит нормали всех точек поверхности, лежащих на главном сечении, коэффициенты отражения с индексом поляризации данного рода зависят от соответствующих коэффициентов с индексами только поляризации того же рода, так как углы $\gamma_i = 0$, и, следовательно, выражение для энергии, принимая во внимание (13), будет иметь вид:

$$E_\nu = \frac{1}{2}\mathfrak{K}_\nu \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} (1-r_{\|}) \left[1 - \sum_{i=1}^{i=\infty} r_{1\|} r_{2\|} \ldots r_{(i-1)\|} (1-r_{i\|}) e^{-\alpha \sum_{i=1}^{i} s_i} \right] \sin 2\vartheta \, d\vartheta + \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} (1-r_{\perp}) \left[1 - \sum_{i=1}^{i=\infty} r_{1\perp} r_{2\perp} \ldots r_{(i-1)\perp} (1-r_{i\perp}) e^{-\alpha \sum_{i=1}^{i} s_i} \right] \sin 2\vartheta \, d\vartheta \right\} \quad (23)$$

В ряде частных случаев формула (23) значительно упрощается. Рассмотрим некоторые частные случаи, могущие иметь значительные применения.

§ 4. Излучение прозрачного шара (капли)

Отмечаем прежде всего, что в этом случае (см. фиг. 2)

$$r = r_1 = r_2 = \ldots; \quad s_1 = s_2 = \ldots = s;$$

формула (14) примет следующий вид:

$$a = (1-r)\{1-(1-r)e^{-\alpha s}[1 + re^{-\alpha s} + r^2 e^{-2\alpha s} + \ldots]\}$$

и далее

$$a = (1-r)\left[1 - \frac{(1-r)e^{-\alpha s}}{1-re^{-\alpha s}}\right] \quad (24)$$

Приводим формулу (24) к следующему виду:

$$a = \frac{(1-r)u}{(1-r)+ru}, \quad (25)$$

где

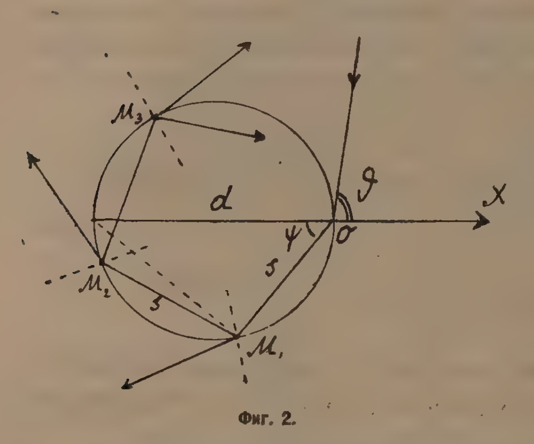
$$u = 1 - e^{-\alpha s}; \quad (26)$$

Далее, обозначая диаметр шара через d из чертежа имеем:

$$s = d \cos \psi.$$

Принимая во внимание изложенное и произведя в формуле (23) интегрирования по φ, для величины монохроматической энергии, излучаемой единицей поверхности шара будем иметь выражение:

$$E_\nu = \pi \mathfrak{K}_\nu \int_0^{\pi/2} \left[\frac{(1 - r_{||}) u}{(1 - r_{||}) + r_{||} u} + \frac{(1 - r_\perp) u}{(1 - r_\perp) + r_\perp u} \right] \sin 2\vartheta \cdot d\vartheta \qquad (27)$$



Фиг. 2.

Как уже отмечалось выше, для коэффициентов $r_{||}$ и $r_\perp$ в первом приближении можно воспользоваться формулами Френеля

$$r_{||} = \frac{\sin^2(\vartheta - \psi)}{\sin^2(\vartheta + \psi)}$$

и

$$r_\perp = \frac{\operatorname{tg}^2(\vartheta - \psi)}{\operatorname{tg}^2(\vartheta + \psi)} \qquad (28)$$

где

$$\sin \vartheta = n \sin \psi.$$

Таким образом, энергия монохроматического излучения прозрачного шара в зависимости от показателя преломления, коэффицента поглощения, а также температуры и частоты излучения выражается следующим образом:

$$E_\nu = \pi \mathfrak{K}_\nu \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\sin 2\vartheta \sin 2\psi (1 - e^{-ad\cos\psi})}{\sin 2\vartheta \sin 2\psi + \sin^2(\vartheta - \psi)(1 - e^{-ad\cos\psi})} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin 2\vartheta \sin 2\psi (1 - e^{-ad\cos\psi})}{\sin 2\vartheta \sin 2\psi + \sin^2(\vartheta - \psi)\cos^2(\vartheta + \psi))(1 - e^{-ad\cos\psi})} \right] \sin 2\vartheta \, d\vartheta \quad . . (29)$$

В случае газообразного шара можно положить $r_{||}$ и $r_\perp$ достаточно близкими к нулю.

Для энергии излучаемой газообразным шаром, из формулы (27) получаем:

$$E_\nu = 2\pi \mathfrak{K}_\nu \int_0^{\pi/2} (1 - e^{-ad\cos\psi}) \sin 2\vartheta \, d\vartheta,$$

так как ψ можно положить равным ϑ, ибо коэффициент преломления газа весьма близок к единице, то интегрирование дает

$$E_\nu = \pi \mathfrak{K}_\nu \left[1 - \frac{2}{\alpha^2 d^2} + \frac{2}{\alpha d} e^{-\alpha d} + \frac{2}{\alpha^2 d^2} e^{-\alpha d} \right],$$

т. е. формулу, полученную W. Nusselt'ом и A. Schack'ом.[1]

§ 5. Излучение плоско-параллельной прозрачной пластинки

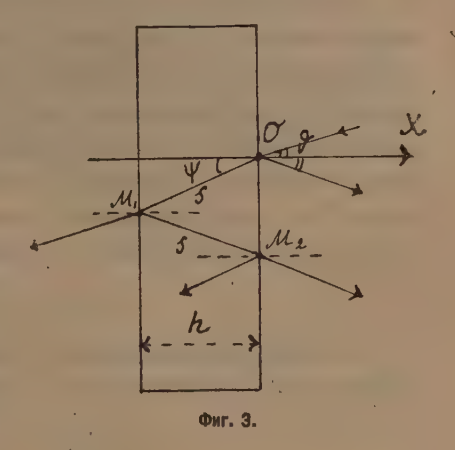
Вопрос об излучении прозрачной пластинки был рассмотрен мною значительно раньше, чем выполнена эта работа.[2]

В данном случае, так же как и в предыдущем

$$r = r_1 = r_2 = \ldots ;$$
$$s_1 = s_2 = \ldots = s;$$

(см. фиг. 3). Обозначая толщину пластинки через h, будем иметь:

$$s = \frac{h}{\cos\psi} \qquad (30)$$



Фиг. 3.

Принимая во внимание выражения (23) и (24) получим, что энергия E_ν, излучаемая единицей поверхности прозрачной пластинки, также будет выражаться формулой (27), только здесь величина u будет иметь другое значение.

Воспользовавшись формулами Френеля (28) и формулой (30), получим энергию E_ν для случая пластинки в следующем виде:

$$E_\nu = \pi \mathfrak{K}_\nu \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\sin 2\vartheta \sin 2\psi \left(1 - e^{-\frac{\alpha h}{\cos\psi}}\right)}{\sin 2\vartheta \sin 2\psi + \sin^2(\vartheta - \psi)\left(1 - e^{-\frac{\alpha h}{\cos\psi}}\right)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin 2\vartheta \sin 2\psi \left(1 - e^{-\frac{\alpha h}{\cos\psi}}\right)}{\sin 2\vartheta \sin 2\psi + \sin^2(\vartheta - \psi)\cos^2(\vartheta + \psi)\left(1 - e^{-\frac{\alpha h}{\cos\psi}}\right)} \right] \cdot \sin 2\vartheta \, d\vartheta \qquad (31)$$

[1] A. Schack. Ztschr. f. techn. Phys., 1924, H. 6, p. 269.

[2] Доклад на объединенном заседании Узб. Научно-исслед. гидрометеорол. инстит. и Научно-исслед. бюро Узб. Гос. Педагог. акад. от 20 мая 1931 г.

Отметим, что в отношении полученного выражения (31) Я. М. Коганом[1] был рассмотрен вопрос о верхнем и нижнем пределе интеграла, стоящего в этом выражении.

Для энергии, излучаемой газообразным плоскопараллельным слоем на основании соображений, аналогичных развитым в § 4, формулы (27) и (30) дают следующую величину

$$E_\nu = 2\pi \mathfrak{K}_\nu \int_0^{\pi/2} \left(1 - e^{-\frac{ah}{\cos\psi}}\right) \sin 2\vartheta \, d\vartheta,$$

причем в последнем выражении можно положить ψ равным ϑ.

Следует заметить, что в случае плоскопараллельной стеклянной пластинки является целесообразным с точки зрения приложений введение понятий о «коэффициенте отражения пластинки» и о «прозрачности пластинки», понимая под этим соответственно ту часть энергии, которая отбрасывается пластинкой обратно в сторону падающей энергии и ту часть энергии, которая пропускается пластинкой. Обозначая эти величины соответственно через r' и d' для направленной и через R и D для диффузной радиации, будем иметь для коэффициентов выхода:

$$b = r' + d' \quad \text{и} \quad B = R + D.$$

Принимая во внимание фиг. 3, таблицу, составленную при исследовании общего случая и равенства (30) не трудно найти, что

$$r' = r + r(1 - r)^2 \frac{e^{-\frac{2ah}{\cos\psi}}}{1 - r^2 e^{-\frac{2ah}{\cos\psi}}}$$

и

$$d' = (1 - r)^2 \frac{e^{-\frac{ah}{\cos\psi}}}{1 - e^{-\frac{2ah}{\cos\psi}}};$$

Величины r', R и d', D связаны равенствами, аналогичными (11) и (12). В случае независимости r' и d' от азимута имеем:

$$R = \int_0^{\pi/2} r' \sin 2\vartheta \, d\vartheta;$$

$$D = \int_0^{\pi/2} d' \sin 2\vartheta \, d\vartheta.$$

[1] Я. М. Коган, Гелиоэнергетика, сборник исследовательских работ Узбекского гидрометеорологического института, стр. 75, 1933.

A. TITOW. ÜBER DIE VON EINEM DURCHSICHTIGEN BEGRENZTEN KÖRPER AUSGESTRAHLTE ENERGIE

ZUSAMMENFASSUNG

Ziel der Arbeit ist die Einführung von geometrischen Elementen in das Kirchhoffsche Gesetz in expliziter und allgemeiner Form. Das Problem eine allgemeine Methode zur Berechnung der von einem begrenzten Körper ausgestrahlten Energie auszuarbeiten hat auch praktische Bedeutung für die Heliotechnik (Glasplatte), Meteorologie (Wassertropfen) u. s. w. § 1 der Arbeit enthält allgemeine Betrachtungen; § 2 gibt Beziehungen zwischen den optischen Grössen, die den Körper in einem Punkte seiner Oberfläche charakterisieren; in § 3 wird der allgemeine Fall eines begrenzten durchsichtigen isotropen Körpers behandelt; § 4 und § 5 enthalten Anwendungen: die Ausstrahlung einer durchsichtigen Kugel (Tropfen) und einer planparallelen Platte.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

УЧЕТ СЖИМАЕМОСТИ ВОЗДУХА ВО ВРЕМЯ ПОЛЕТА

П. А. ВАЛЬТЕРА

(Представлено академиком С. А. Чаплыгиным)

§ 1. Будем рассматривать относительное движение воздуха около летящего крыла аэроплана. Воздух предполагаем при этом невязкой, но сжимаемой жидкостью. Теплообменом внутри воздуха пренебрегаем и принимаем за характеристическое уравнение газа уравнение адиабатического изменения

$$p = m\rho^k, \tag{1}$$

где k в случае воздуха приблизительно равняется 1.4.

При этих условиях движение, возникшее при отсутствии в пространстве неконсервативных полей сил, будет иметь потенциал скоростей, который мы обозначаем через φ. Точно так же функция течения у нас, как обычно, будет обозначаться через ψ.

Интеграция уравнений движения жидкости, как известно, приводит к равенствам

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{2}$$

причем, функция потенциала скоростей определяется из уравнения в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0 \tag{2'}$$

играющего в теории потока сжимаемой жидкости роль, аналогичную роли уравнения Лапласа для жидкости несжимаемой.

Величина σ в уравнении (2') равняется ρ/ρ_0, т. е. отношение между плотностью воздуха ρ в рассматриваемой точке пространства и плотностью ρ_0 в удаленных от крыла частях потока. Величина эта, как мы убедимся ниже, в обычных условиях меняется очень слабо. Поэтому, во-пер-

ных, $\frac{\partial\sigma}{\partial x}, \frac{\partial\sigma}{\partial y}$ — невелики, во-вторых, $\sigma - \sigma_0 = \sigma - 1$ тоже не может быть значительным.

Так как σ на основании уравнения Бернулли зависит от производных $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}$, то уравнение ($2'$) поддается точной интеграции с большим трудом. В нашем распоряжении остается только приближенный анализ.

Относительный поток воздуха стационарен, и теорема Бернулли вместе с (1) дает нам:

$$\sigma = \frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 - \frac{V^2 - V_\infty^2}{2\frac{k}{k-1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty}}\right]^{\frac{1}{k-1}}, \tag{3}$$

где p_∞, $\rho_\infty = \rho_0$ соответствуют состоянию газа в бесконечном удалении от крыла.

Отношение:

$$\frac{V^2 - V_\infty^2}{2\frac{k}{k-1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty}} = \frac{\frac{V^2 - V_\infty^2}{2g}}{\frac{k}{k-1}\frac{p_\infty}{\gamma_\infty}},$$

где $\frac{V^2 - V_\infty^2}{2g}$ — скоростной напор, создаваемый движением крыла, а p_∞/γ_∞ — полный напор, соответствующий атмосферному давлению, в обычных условиях полета невелико. Поэтому, применяя к равенству (3) бином Ньютона, получаем:

$$\sigma = 1 - \frac{V^2 - V_\infty^2}{2k\frac{p_\infty}{\rho_\infty}} + \frac{2-k}{8}\frac{(V^2 - V_\infty^2)^2}{k^2\frac{p_\infty^2}{\rho_\infty^2}} + \ldots;$$

или так как

$$\frac{kp_\infty}{\rho_\infty} = c^2, \tag{4}$$

где c звуковая скорость, соответствующая состоянию газа p_∞, ρ_∞, то

$$\sigma = 1 - \frac{V^2 - V_\infty^2}{2c^2} + \frac{2-k}{8}\frac{(V^2 - V_\infty^2)^2}{c^4} + \ldots \tag{5}$$

В первом приближении можем писать

$$\sigma = 1 - \frac{V^2 - V_\infty^2}{2c^2}, \tag{6}$$

и, следовательно:

$$\log\sigma = \log\left(1 - \frac{V^2 - V_\infty^2}{2c^2}\right) = -\frac{V^2 - V_\infty^2}{2c^2}. \tag{7}$$

Из последнего равенства следует:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \log \sigma}{\partial x} &= -\frac{1}{2c^2}\frac{\partial V^2}{\partial x} \\ \frac{\partial \log \sigma}{\partial y} &= -\frac{1}{2c^2}\frac{\partial V^2}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

С другой стороны, уравнение (2') легко привести к следующему виду:

$$\Delta\varphi = -\frac{\partial \log \sigma}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \log \sigma}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad (9)$$

или, пользуясь равенствами (8):

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2c^2}\left\{\frac{\partial V^2}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right\} \qquad (10)$$

Второй член этого равенства мал, так как содержит множитель $\frac{1}{2c^2}$. По той же причине мы сделаем ошибку второго порядка малости, заменив в (10) сумму

$$\frac{\partial V^2}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

ее приближенной величиной

$$\frac{\partial V_0^2}{\partial x}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0^2}{\partial y}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y},$$

где V_0 и φ_0 суть величины скорости и потенциала скоростей для течения несжимаемой жидкости, обтекающего крыло, одинаковое с тем, которое мы рассматриваем, и при одинаковых условиях, т. е. при той же скорости в бесконечности и при том же угле атаки. Поток этот является первым (грубым) приближением по отношению к потоку сжимаемой жидкости.

Произведя указанную замену, сводим основное уравнение к уравнению типа Пуассона:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial V_0^2}{\partial x}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0^2}{\partial y}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\right) = \frac{N(x, y)}{2c^2}, \qquad (11)$$

где

$$N(x, y) = \frac{\partial V_0^2}{\partial x}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0^2}{\partial y}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}. \qquad (12)$$

Второй член равенства (11) нам обыкновенно известен, так как величины, относящиеся к потоку несжимаемой жидкости, мы в состоянии определить, если только знаем комформное отображение области, внешней относительно контура крыла, на внутренность окружности. В частности мы в дальнейшем предполагаем рассмотреть крыло Жуковского.

Во всех этих случаях задача заключается в интеграции уравнения (11) с известной функцией $N(x, y)$. Интеграция эта обычная в теории притяжения, вообще говоря, сводится к квадратурам и представляет некоторые затруднения только тогда, если требуется найти интегралы, удовлетворяющие определенным граничным условиям. В нашем случае задача именно такова. Однако, как мы увидим дальше, и здесь знание комформного отображения внешней крылу области на круг позволяет довести решение проблемы до конца.

§ 2. Известно, что интеграл уравнения (11) предыдущего параграфа может быть написан в виде:

$$\varphi = H + \frac{1}{4\pi c^2}\int_\Omega\int N(x_A, y_A)\log|z - z_A|\, d\sigma_A \qquad (1)$$

где 1) z — комплексная координата точки, для которой мы ищем значение φ; точку эту в дальнейшем называем точкой C; 2) A — точка с координатой

$$z_A = x_A + iy_A$$

— какая-то точка, лежащая в плоскости z вне контура крыла, т. е. тоже в области потока; 3) $d\sigma_A$ — элемент площади плоскости z соседний с точкой A; 4) интегрирование ведется, изменяя положение точки A вдоль всей области потока Ω; 5) H — гармоническая функция, которая в нашем случае только на члены порядка $^1/_{c^2}$ отличается от φ_0 — функции потенциала скоростей для потока несжимаемой жидкости.

Функция φ должна выполнять следующие условия:

1′) функция эта удовлетворяет уравнению (11) предыдущего параграфа, что достигается ее видом (1);

2′) на контуре крыла должно быть:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \qquad (2)$$

что, вводя обозначения

$$\Phi = \frac{1}{4\pi c^2}\int_\Omega\int N(x_A, y_A)\log|z - z_A|\, d\sigma_A,$$

можно переписать:

$$\frac{\partial H}{\partial n} = -\frac{\partial\Phi}{\partial n};$$

3′) в точке $z = \infty$ функция φ мало отличается от φ_0, т. е. имеет главной своей частью член $xV_{\infty x} + yV_{\infty y}$; остальные же члены в этой точке или конечны, или порядка $\log|z|$ т. е. все меньшего порядка, чем $|z|$;

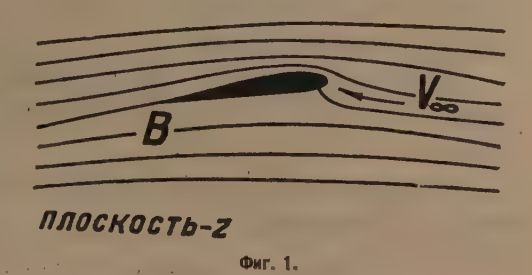
4′) поток, определяемый функцией φ имеет точку разветвления на острие крыла B (см. фиг. 1), т. е. величины $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ в этой точке остаются конечными.

Пользуясь выражением (1) мы, как уже было сказано, удовлетворяем условие 1′. Остается только выполнить условия, перечисленные под цифрами 2′, 3′ и 4′.

С этой целью представим равенство (1) в таком виде

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{4\pi c^2} \int\limits_{\Omega}\int \left\{ N(x_A, y_A) \log |z - z_A| + g_A \right\} d\sigma_A \qquad (3)$$

где $g_A = g(z, z_A)$ есть, во-первых, гармоническая функция от точки C; во-вторых зависит также от координат точки A. Так как главная часть функции H равенства (1) введена в равенство (3) в виде члена φ_0, то член с g_A должен создать после интегрирования только небольшой добавок в виде гармонической функции h.



Фиг. 1.

Кроме того, так как φ_0 удовлетворяет условиям 2′, 3′ и 4′, то для того, чтобы удовлетворить всем вообще условиям, достаточно, чтобы функция

$$\varphi_A = N(x_A, y_A) \left\{ \log |z - z_A| + g_A \right\} \qquad (4)$$

имела следующие свойства:

1″) на контуре крыла должно выполняться равенство

$$\frac{\partial \varphi_A}{\partial n} = 0 \qquad (5)$$

причем, дифференцирование ведется по переменному z (точке C);

2″) в точке $z = \infty$ функция $\log |z|$ имеет только члены порядка $\log |z|$, так как член $xV_{\infty x} + yV_{\infty y}$ целиком содержится в функции φ_0;

3″) в точке B, т. е, когда $z = z_B$ величины $\frac{\partial \varphi_A}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi_A}{\partial y}$ остаются конечными.

Функция φ_A, согласно ее определению (4), гармоническая функция от z во всей внешней относительно крыла области за исключением точки

$$z = z_A$$

и, быть может, точки $z = \infty$. Следовательно она определяет в плоскости z некоторый поток несжимаемой жидкости, который в виду равенства (4) и условий $1''$, $2''$ и $3''$ обладает следующими свойствами:

1) в точке $z = z_A$ он имеет источник с расходом $2\pi N(x_A, y_A)$, который затем стекает обратно в точке $z = \infty$, где расположен сток;

2) он обтекает крыло;

3) он имеет на острие крыла B точку разветвления.

Последнее условие, вообще говоря, мы можем выполнить, только задавши некоторую циркуляцию около крыла. Это обстоятельство вместе с логарифмическим членом $N(x_A, y_A)\log|z - z_A|$ создает в точке $z = \infty$ бесконечность. Бесконечность эта однако имеет порядок $\log|z|$ и, следовательно, не нарушает условия $2''$.

Ниже мы убедимся, что на основании перечисленных свойств потока $1''$, $2''$ и $3''$ функция его потенциала φ_A может быть легко отыскана.

Пользуясь этой функцией мы, подставив (4) в (3), можем представить (1) в таком виде:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_{\Omega}\int \varphi_A \, d\sigma_A. \tag{6}$$

Найдя φ_A и произведя интегрирование, мы решаем задачу. Вопрос заключается только в сходимости интегралов, которые мы таким образом получаем. К вопросу этому мы еще вернемся в дальнейшем.

§ **3.** Необходимые нам при вычислениях функции φ_0 и φ_A мы всегда можем построить, если только знаем конформное отображение области потока в плоскости полета крыла z на внутренность круга $|\zeta| = 1$ в плоскости ζ. При этом обе упомянутые функции особенно удобно и просто выражаются не как функции z — комплексной координаты точки, лежащей в плоскости полета крыла, а как функции от ζ.

Указанное обстоятельство приводит к мысли производить все нужные нам вычисления не в плоскости z, а в плоскости ζ. Мысль эта вполне оправдывает себя на практике.

Условимся сначала в некоторых определениях, расширяющих наши обычные представления о переносе потока из плоскости в плоскость.

Применяя конформное отображение одной плоскости на другую, например z на ζ, условимся приписывать точкам плоскости те же значения функции потенциала скоростей, которые эта функция имеет в плоскости z, где происходит поток.

Перенесенную таким образом в плоскость ζ функцию φ будем рассматривать как потенциал скоростей некоторого потока, который условимся называть потоком[1] около крыла, перенесенным в плоскость ζ.

Линии постоянного потенциала скоростей: $\varphi = \text{const}$ потока в плоскости z и перенесенного потока в плоскости ζ очевидно при конформном преобразовании переходят друг в друга.

Так как, с другой стороны, линии течения потока всегда ортогональны к линиям $\varphi = \text{const}$ и так как углы при конформном преобразовании сохраняются, то из предыдущего следует, что при конформном отображении переходят друг в друга также и линии течения преобразующихся потоков. Конечно, отсюда еще не следует, что величины ψ — функции течения переносятся при этом точка в точку, т. е. что величина ψ на некоторой линии течения в плоскости z равняется величине ψ — функции течения преобразованного потока на соответствующей линии в плоскости ζ. При более подробном анализе оказывается однако, что при соответствующем выборе констант выполняется также и эта теорема.

Точно также следует остерегаться применять здесь без доказательства теорему о соответствии скоростей потоков в различных плоскостях, доказываемую в гидродинамике для случая потоков несжимаемой жидкости. Зато теорема эта безусловно применима для обоих наших вспомогательных потоков, управляемых гармоническими функциями φ и φ_A (главный поток и поток A). Позднее мы покажем, что теорема эта остается в силе также и для составного потока, управляемого функцией φ.

При вычислении других величин, которые характеризуют свойства потока, приходится применять излагаемый ниже общий процесс.

В последующем мы убедимся, что все подобные величины изображаются у нас некоторыми определенными интегралами. Например, компоненты скорости потока в плоскости z даются равенствами

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial\varphi}{dx} = \frac{\partial\varphi_0}{dx} + \frac{1}{4\pi c^2}\int_\Omega\int \frac{\partial\varphi_A}{\partial x}\,d\sigma_A \\ v &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial y} + \frac{1}{4\pi c^2}\int_\Omega\int \frac{\partial\varphi_A}{\partial y}\,d\sigma_A \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

непосредственно вытекающими из равенства (6) § 2.

[1] Поток этот фиктивный, так как хотя по законам гидродинамики он и может быть осуществлен, но только при условии выполнения некоторого особенного закона зависимости плотности жидкости от координат точки пространства, который физически не имеет никакого смысла.

Условимся употреблять обозначение

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \tag{2}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

или, сравнивая это с (1):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= \frac{1}{4\pi c^2} \int\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_A}{\partial x}\, d\sigma_A \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} &= \frac{1}{4\pi c^2} \int\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_A}{\partial y}\, d\sigma_A. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Что касается величин $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}$, входящих в равенства (3), то это суть величины компонентов скоростей некоторого потока несжимаемой жидкости и без труда подсчитываются по известным нам правилам. Остается таким образом рассмотреть величины добавочных скоростей $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$.

Равенства (4) выражают их в функции x, y — координат точки в плоскости z. Чтобы выразить их в функции ξ, η — координат точки плоскости ζ, нам просто следует применить правило преобразования переменных под знаком интеграла. Например, первое из равенств (4) при этом, как обычно, следует представить

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{1}{4\pi c^2} \int\int \frac{\partial \varphi_A}{\partial x} \frac{(d\sigma_A)_z}{(d\sigma_A)_\zeta} (d\sigma_A)_\zeta \tag{5}$$

где значки $(d\sigma_A)_z$ и $(d\sigma_A)_\zeta$ обозначают соответствующие друг другу в конформном отображении элементарные площадки в плоскостях z и ζ, расположенные вокруг точки A. Как известно, величина отношения $(d\sigma_A)_z/(d\sigma_A)_\zeta$, или вернее предела этого отношения при $d\sigma \to 0$ не зависит от формы элементарной площадки и является функцией только точки A. Это так называемый Якобиевский множитель преобразования переменных. У нас он в дальнейшем фигурирует в форме функции $\frac{1}{H}$, определяемой из равенства

$$\frac{1}{H} = \frac{(d\sigma)_z}{(d\sigma)_\zeta} = \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2. \tag{6}$$

При помощи этой функции равенства (4) можно переписать

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=\frac{1}{4\pi c^2}\int\int\frac{1}{H_A}\frac{\partial\varphi_A}{\partial x}d\sigma_A\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=\frac{1}{4\pi c^2}\int\int\frac{1}{H_A}\frac{\partial\varphi_A}{\partial y}d\sigma_A,\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

где интегрирование ведется по площади ω круга $|\zeta|=1$, величины[1]

$$\frac{\partial\varphi_A}{\partial x},\quad\frac{\partial\varphi_A}{\partial y}$$

должны быть выражены в зависимости от ξ, η — координат плоскости ζ, и, наконец, индекс A поставлен около H, чтобы напомнить, что на каждой элементарной площадке $d\sigma_A$ величина H определяется в зависимости от координат точки A, а не C.

§ 4. В дальнейшем мы будем рассматривать поток около дужки Жуковского. Как увидим ниже специальные свойства этой дужки значительно облегчают вычисления и позволяют взять все интегралы, которые нам при этом встретятся.

Прежде всего нам необходимо отобразить внешнюю относительно дужки область (область потока) на внутренность круга с радиусом, равным единице, и с центром, лежащим в начале координат. Такое отображение дается формулой

$$z=\frac{\gamma\zeta+\beta}{\zeta}+\frac{\zeta}{\gamma\zeta+\beta},\tag{1}$$

которая без особого труда выводится при предположении, что, во-первых, точке $z=\infty$ соответствует в плоскости ζ точка $\zeta=0$, и что, во-вторых, острие крыла B соответствует в плоскости ζ точке $\zeta=1$. Кроме того формула (1) предполагает, что масштаб длины в плоскости z выбран так, чтобы освободиться от постоянного множителя, который в противном случае стоял бы в качестве коэффицнента при правой части равенства.

Величины γ и β, входящие в (1), вообще говоря, суть комплексные величины, связанные соотношением

$$\gamma+\beta=1.\tag{2}$$

При том в случае обычной формы крыла величина $|\gamma|$ весьма невелика.

[1] Это частные производные φ_A по x, y — координатам точки C плоскости z.

Из (1) легко получаем

$$\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{\beta}{\zeta^2} + \frac{\beta}{(\gamma\zeta+\beta)^2} = \beta^2 \frac{(\zeta-1)\{(1+\gamma)\zeta+\beta\}}{\zeta^2(\gamma\zeta+\beta)^2} \qquad (3)$$

Подставляя это в равенство (6) § 3 получаем

$$H = \frac{|\zeta|^4 |\gamma\zeta+\beta|^4}{|\beta|^4 |\zeta-1|^2 |(1+\gamma)\zeta+\beta|^2}. \qquad (4)$$

Обозначим затем модуль и аргумент величины ζ через r и θ, так что

$$\zeta = re^{i\theta}. \qquad (5)$$

Вводим кроме того общее правило для обозначений, согласно которому

$$\zeta_n = r_n e^{i\theta_n}$$

и

$$P(n) = |\zeta - \zeta_n|^2 = |re^{i\theta} - r_n e^{i\theta_n}|^2 = r^2 - 2rr_n \cos(\theta - \theta_n) + r_n^2, \quad (6)$$

некоторый полином канонического вида, который будет неоднократно встречаться в наших дальнейших выкладках.

В соответствии с этим общим обозначением, полагая

$$r_1 e^{i\theta_1} = 1; \quad r_2 e^{i\theta_2} = -\frac{\beta}{1+\gamma}; \quad r_3 e^{i\theta_3} = -\frac{\beta}{\gamma}, \qquad (7)$$

можем равенство (4) представить таким образом:

$$H = \frac{|\gamma|^4 r^4}{|\beta|^4 |1+\gamma|^2} \frac{P^2(3)}{P(1)P(2)}. \qquad (8)$$

Отсюда следует, что функция H есть рациональная функция от r и от $\cos\theta$, $\sin\theta$. Обстоятельство это, как убедимся в дальнейшем, повторится относительно большинства выражений, которые будут фигурировать в наших выкладках.

§ 5. Основной поток, управляемый гармонической функцией потенциала φ_0 переносится в плоскость ζ на основании общеизвестных правил переноса потоков несжимаемой жидкости. В плоскости ζ поток этот обладает особо простыми свойствами: 1) он должен обтекать окружность $|\zeta| = 1$; 2) в точке $\zeta = 0$ он имеет диполь и вихрь; 3) в точке $\zeta = 1$ он имеет точку разветвления. Эти свойства позволяют нам отыскать самый поток, пользуясь началом изображений.

Диполь в точке $\zeta = 0$ дает

$$\varphi + i\psi = \frac{C}{\zeta} + \overline{C}\zeta, \tag{1}$$

причем постоянное диполя C будет нами связано с V_∞ позднее. Вихрь создает поток

$$\varphi + i\psi = -\frac{iJ}{2\pi}\log\zeta. \tag{2}$$

Комплексная функция нашего составного потока будет таким образом

$$\varphi + i\psi = \frac{C}{\zeta^2} + \overline{C}\zeta - \frac{iJ}{2\pi}\log\zeta. \tag{3}$$

Сопряженная скорость этого потока (скорость в плоскости ζ) вычисляется из равенства

$$u - iv = -\frac{C}{\zeta^2} + \overline{C} - \frac{iJ}{2\pi\zeta} = \frac{-C + \overline{C}\zeta^2 - ij\zeta}{\zeta^2} \tag{4}$$

где

$$j = \frac{J}{2\pi}.$$

Так как $\zeta = 1$ есть точка разветвления потока, то

$$\overline{C} - C - ij = 0,$$

т. е., полагая $C = C_x + iC_y$, получаем:

$$j = -2C_y. \tag{5}$$

Формулы (3) и (4) после этого дают:

$$\varphi + i\psi = \frac{C}{\zeta} + \overline{C}\zeta - (\overline{C} - C)\log\zeta, \tag{6}$$

$$u - iv = \frac{(\zeta - 1)(C + \overline{C}\zeta)}{\zeta^2}. \tag{7}$$

Остается теперь найти связь между C и $\overline{W}_\infty = u_\infty - iv_\infty$. Для этого следует, зная разложение $\varphi + i\psi$ около $\zeta = 0$ и, пользуясь указанной в (1) § 4 связью между ζ и z, найти разложение $\varphi + i\psi$, рассматривая эту функцию как функцию от z, около $z = \infty$. Затем, вычисливши из полученного разложения сопряженную скорость потока в плоскости z около

$$z = \infty,$$

написать, что скорость эта равна $\overline{W}_\infty$. Проделанные таким образом вычисления дают

$$\overline{W}_\infty = \frac{C}{\beta} \tag{8}$$

где β есть величина коэффициента, входящая в равенство (1) § 4.

§ 6. Точно так же без труда может быть найдена в плоскости ζ введенная в § 2 функция φ_A. В названном параграфе перечислены свойства потока, определяемого функцией φ_A в плоскости z. Отображая эту плоскость на плоскость ζ, мы получаем в последней поток, имеющий комплексную функцию[1]

$$f_A = \varphi_A + i\psi_A$$

и характеризующийся следующими свойствами:

1) он имеет в точке $\zeta = \zeta_A$ источник с расходом $2\pi N = 2\pi N(x_A, y_A)$.

2) в точке $\zeta = 0$ он имеет сток с тем же расходом и вихрь с некоторой циркуляцией J, величина которой будет определена ниже;

3) он обтекает окружность $|\zeta| = 1$;

4) он имеет в точке $\zeta = 1$, соответствующей острию крыла B, точку разветвления.

Будем в дальнейшем называть этот поток потоком A. Свойства его очевидно зависят от расположения точки A того же наименования.

Начало изображений дает нам возможность непосредственно построить поток A, пользуясь его перечисленными свойствами. Комплексная функция потока будет:

$$_A = \varphi_A + i\psi_A = N\log(\zeta - \zeta_A) + N\log(\zeta - \zeta_A^*) - N\log\zeta - ij\log\zeta \qquad (1)$$

где

$$j = \frac{J}{2\pi} \qquad (1')[2]$$

а ζ_A^* — изображение (инверсия) точки A относительно окружности $|\zeta| = 1$ и определяется из равенства

$$\zeta_A^* \overline{\zeta}_A = 1. \qquad (1'')$$

Равенство (1) дает после дифференцирования сопряженную скорость потока A в плоскости ζ:

$$u_A - iv_A = \frac{N}{\zeta - \zeta_A} + \frac{N}{\zeta - \zeta_A^*} - \frac{N}{\zeta} - \frac{ij}{\zeta}. \qquad (2)$$

Так как $\zeta = 1$ является точкой разветвления потока, то приравнявши скорость в этой точке нулю и решив получившееся уравнение относительно j, получаем:

$$j = j_0 N = -iN\frac{1 - \zeta_A\zeta_A^*}{1 - (\zeta_A + \zeta_A^*) + \zeta_A\zeta_A^*} \qquad (3)$$

[1] По общему правилу комплексная функция потока несжимаемой жидкости при конформных преобразованиях остается неизменной.

[2] Величины J и j этого параграфа, не равны величинам J и j, встречающимся в предидущем параграфе.

или полагая $\zeta_A = re^{i\theta}$, имеем:

$$j = j_0 N = \frac{2Nr\sin\theta}{r^2 - 2r\cos\theta + 1} = \frac{2Nr\sin\theta}{P(1)}, \tag{4}$$

где $P(1)$ — есть полином канонического вида, определенный нами в § 4.

Равенство (2) можно также представить в следующей форме:

$$u_A - iv_A = \frac{(\zeta - 1)\left[(N - ij)\zeta + (N + ij)\zeta_A\zeta_A^*\right]}{\zeta\left[\zeta^2 - (\zeta_A + \zeta_A^*)\zeta + \zeta_A\zeta_A^*\right]}. \tag{5}$$

или так как $j = Nj_0$, то

$$u_A - iv_A = N\frac{(\zeta - 1)\left[(1 - ij_0)\zeta + (1 + ij_0)\zeta_A\zeta_A^*\right]}{\zeta\left[\zeta^2 - (\zeta_A + \zeta_A^*)\zeta + \zeta_A\zeta_A^*\right]} \tag{6}$$

Обе эти формулы дают скорость потока A в плоскости ζ и, чтобы перейти к скорости в плоскости z, требуется сделать пересчет по обычным правилам.

§ 7. Формула (2) § 3:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \tag{1}$$

может быть выражена в виде следующей теоремы: *функция потенциала скоростей потока сжимаемой жидкости равняется функции потенциала скоростей несжимаемой жидкости плюс некоторая добавочная функция* φ_1.

В соответствии с этим скорости потока сжимаемой жидкости являются геометрической суммой скоростей потока несжимаемой и скоростей добавочного потока, задаваемого функцией потенциала скоростей φ_1. Составляющие этих последних скоростей очевидно даются равенствами:

$$u_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, \quad v_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}. \tag{2}$$

Формулы (1) § 3 дают

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial x} + \frac{1}{4\pi c^2}\int\int\frac{\partial\varphi_A}{\partial x}\,d\sigma_A \\ v &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial y} + \frac{1}{4\pi c^2}\int\int\frac{\partial\varphi_A}{\partial y}\,d\sigma_A. \end{aligned} \tag{3}$$

Соединяя эти две вещественные функции точки плоскости z в одну комплексную на подобие того, как это делается в гидродинамике несжимаемой жидкости, пишем

$$u - iv = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} + \frac{1}{4\pi c^2}\int\int\left(\frac{\partial\varphi_A}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi_A}{\partial y}\right)d\sigma_A. \tag{4}$$

Величину $u - iv$ по аналогии с гидродинамикой несжимаемой жидкости можно назвать сопряженной скоростью потока сжимаемой жидкости, но при этом надо отметить, что в случае сжимаемой жидкости эта комплексная функция отнюдь не будет аналитической функцией.

Однако функции, которые согласно равенству (4) надо знать для ея вычисления, а именно

$$u_0 - iv_0 = \frac{df_0}{dz} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} \tag{5}$$

— сопряженная скорость потока несжимаемой жидкости, и

$$u_A - iv_A = \frac{df_A}{dz} = \frac{\partial\varphi_A}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi_L}{\partial y} \tag{6}$$

— сопряженная скорость потока A, обе являются аналитическими функциями переменного z во всей области потока, за исключением некоторых особых точек, положение которых читатель без затруднений сможет установить сам. Полагая поэтому, как обычно, $\zeta = \xi + i\eta$, мы можем на основании теории аналитических функций писать:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} = \frac{d\zeta}{dz}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi} - i\frac{\partial\varphi_0}{\partial\eta}\right) \tag{7'}$$

и

$$\frac{\partial\varphi_A}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi_A}{\partial y} = \frac{d\zeta}{dz}\left(\frac{\partial\varphi_A}{\partial\xi} - i\frac{\partial\varphi_A}{\partial\eta}\right), \tag{7''}$$

откуда, вставляя написанное в (4) и замечая, что $\frac{d\zeta}{dz}$ как функция только точки C может быть вынесена из-под интеграла, мы без всяких затруднений получим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{d\zeta}{dz}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - i\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right); \tag{8}$$

т. е. правило о связи сопряженных скоростей одного и того же потока несжимаемой жидкости в различных плоскостях, выраженное в равенствах (7') и (7''), *сохраняет силу также и для рассматриваемого нами потока сжимаемой жидкости.*

Величину $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - i\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}$, входящую в равенство (8), можно назвать сопряженной скоростью потока сжимаемой жидкости в плоскости ζ. Величина эта очевидно равна:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - i\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi} - i\frac{\partial\varphi_0}{\partial\eta} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi} - i\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}, \tag{9}$$

причем:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} - i\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} = \frac{1}{4\pi c^2}\int\int \frac{df_A}{d\zeta} d\sigma_A = \frac{1}{4\pi c^2}\int\int \left(\frac{\partial \varphi_A}{\partial \xi} - i\frac{\partial \varphi_A}{\partial \eta}\right) d\sigma_A. \quad (10)$$

Некоторые соотношения между вводимыми нами величинами легче понимаются, если мы перейдем от сопряженных скоростей к прямым (несопряженным), изображая их однако по прежнему комплексными величинами (но не-аналитическими функциями).

Скорость потока сжимаемой жидкости при этом изобразится

$$W = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (11)$$

скорость потока несжимаемой жидкости будет

$$W_0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \quad (12)$$

наконец, скорость потока A:

$$W_A = \frac{\partial \varphi_A}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi_A}{\partial y} \quad (13)$$

и скорость добавочного потока

$$W_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}. \quad (14)$$

Последняя скорость, очевидно, связана со скоростью W_A соотношением

$$W_1 = \frac{1}{4\pi c^2}\int\int W_A \, d\sigma_A. \quad (15)$$

Условимся обозначать скорости всех этих потоков в плоскости ζ малыми буквами w, прибавляя к этой букве соответственные индексы. Таким образом

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + i\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}; \quad w_0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + i\frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi}, \quad w_A = \frac{\partial \varphi_A}{\partial \xi} + i\frac{\partial \varphi_A}{\partial \eta},$$

и т. д., и в согласии с этим

$$\overline{w} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - i\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \quad \overline{w}_0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} - i\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta}, \quad \overline{w}_A = \frac{\partial \varphi_A}{\partial \xi} - i\frac{\partial \varphi_A}{\partial \eta}$$

и т. д.

Обозначим также полярные координаты точки C буквами ρ, ϑ. Мы принимаем, следовательно, для этой точки $\zeta = \zeta_C = \rho e^{i\vartheta}$ и отличаем ее таким образом от точки A, полярные координаты которой r, θ и для которой

$$\zeta = \zeta_A = re^{i\theta}.$$

Покажем, как вычисляется входящая в интеграл (10) величина:

$$\frac{\partial\varphi_A}{\partial\xi} - i\frac{\partial\varphi_A}{\partial\eta},$$

если мы знаем частные производные $\frac{\partial\varphi_A}{\partial\rho}$, $\frac{\partial\varphi_A}{\rho\partial\vartheta}$ потенциала φ_A по полярным координатам ρ и ϑ.

Величина

$$\frac{\partial\varphi_A}{\partial\xi} + i\frac{\partial\varphi_A}{\partial\eta}$$

есть комплексная величина, изображающая grad φ_A. С другой стороны, нам известно, что проекции этого вектора на направления радиуса и касательной к окружности будут как раз равны $\frac{\partial\varphi_A}{\partial\rho}$ и $\frac{\partial\varphi_A}{\rho\partial\vartheta}$. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial\varphi_A}{\partial\xi} + i\frac{\partial\varphi_A}{\partial\eta} = e^{i\vartheta}\left(\frac{\partial\varphi_A}{\partial\rho} + i\frac{\partial\varphi_A}{\rho\partial\vartheta}\right) \tag{16}$$

и, следовательно:

$$\frac{df_A}{d\zeta} = \frac{\partial\varphi_A}{\partial\xi} - i\frac{\partial\varphi_A}{\partial\eta} = e^{-i\vartheta}\left(\frac{\partial\varphi_A}{\partial\rho} - i\frac{\partial\varphi_A}{\rho\partial\vartheta}\right). \tag{17}$$

Точно так же нетрудно показать, что

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi} - i\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} = e^{-i\vartheta}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho} - i\frac{\partial\varphi_1}{\rho\partial\vartheta}\right). \tag{18}$$

С другой стороны

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho} &= \frac{1}{4\pi c^2}\int\int\frac{\partial\varphi_A}{\partial\rho}\,d\sigma_A \\ \frac{\partial\varphi_1}{\rho\partial\vartheta} &= \frac{1}{4\pi c^2}\int\int\frac{\partial\varphi_A}{\rho\partial\vartheta}\,d\sigma_A. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

До сих пор во всех писавшихся в этом параграфе интегралах предполагалось, что площадка $d\sigma_A$, по которой ведется интегрирование, есть эле-

ментарная площадка плоскости z. Перенося теперь интегрирование в плоскость ζ, как это было объяснено в § 3, получаем вместо (19):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}&=\frac{1}{4\pi c^2}\int\int\frac{1}{H_A}\frac{\partial\varphi_A}{\partial\rho}d\sigma_A\\ \frac{\partial\varphi_1}{\rho\partial\vartheta}&=\frac{1}{4\pi c^2}\int\int\frac{1}{H_A}\frac{\partial\varphi_A}{\rho\partial\vartheta}d\sigma_A,\end{aligned}\right\}\qquad(20)$$

причем интегрирование здесь ведется в плоскости ζ и распространяется на всю внутреннюю площадь окружности $|\zeta|=1$. Соответственно с этим все величины, входящие в подинтегральные выражения, должны быть представлены как функции координат этой плоскости.

§ **8.** Полагая, как в предыдущем параграфе $\zeta=\zeta_C=\rho e^{i\vartheta}$, мы согласно (1) § 6 должны иметь:

$$\varphi_A=N\log|\zeta-\zeta_A|+N\log|\zeta-\zeta_A{}^*|-N\log\rho-j\vartheta. \qquad (1)$$

Так как $\zeta_A=re^{i\theta}$ и, следовательно, $\zeta_A{}^*=\frac{1}{r}e^{i\theta}$, что, принимая $r'=\frac{1}{r}$, будем также писать $\zeta_A{}^*=r'e^{i\theta}$, то:

$$|\zeta-\zeta_A|^2=\rho^2-2r\rho\cos(\vartheta-\theta)+r^2;$$
$$|\zeta-\zeta_A{}^*|^2=\rho^2-2r'\rho\cos(\vartheta-\theta)+r'^2$$

и, следовательно:

$$\left.\begin{aligned}\log|\zeta-\zeta_A|&=\frac{1}{2}\log[\rho^2-2r\rho\cos(\vartheta-\theta)-r^2]\\ \log|\zeta-\zeta_A{}^*|&=\frac{1}{2}\log[\rho^2-2r'\rho\cos(\vartheta-\theta)+r'^2].\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Дифференцируя эти равенства по ρ и ϑ, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\rho}\log|\zeta-\zeta_A|&=\frac{\rho-r\cos(\vartheta-\theta)}{\rho^2-2r\rho\cos(\vartheta-\theta)+r^2}\\ \frac{\partial}{\rho\partial\vartheta}\log|\zeta-\zeta_A|&=\frac{r\sin(\vartheta-\theta)}{\rho^2-2r\rho\cos(\vartheta-\theta)+r^2}\end{aligned}\right\}\qquad(3')$$

и точно так же

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\rho}\log|\zeta-\zeta_A{}^*|&=\frac{\rho-r'\cos(\vartheta-\theta)}{\rho^2-2\rho r'\cos(\vartheta-\theta)+r'^2}\\ \frac{\partial}{\rho\partial\vartheta}\log|\zeta-\zeta_A{}^*|&=\frac{r'\sin(\vartheta-\theta)}{\rho^2-2\rho r'\cos(\vartheta-\theta)+r'^2}.\end{aligned}\right\}\qquad(3'')$$

Дифференцируем теперь по ρ и ϑ равенство (1), применяя при этом (3′) и (3″). Таким образом без труда получаем:

$$\frac{\partial\varphi_A}{\partial\rho}=N\left\{\frac{\rho-r\cos(\vartheta-\theta)}{\rho^2-2\rho r\cos(\vartheta-\theta)+r^2}+\frac{\rho-r'\cos(\vartheta-\theta)}{\rho^2-2\rho r'\cos(\vartheta-\theta)+r'^2}-\frac{1}{\rho}\right\} \tag{4}$$

и

$$\frac{\partial\varphi_A}{\rho\partial\vartheta}=N\left\{\frac{r\sin(\vartheta-\theta)}{\rho^2-2\rho r\cos(\vartheta-\theta)+r^2}+\frac{r'\sin(\vartheta-\theta)}{\rho^2-2\rho r'\cos(\vartheta-\theta)+r'^2}\right\}-\frac{j}{\rho}. \tag{5}$$

Воспользуемся затем равенством (4) § 6, при помощи которого формула (5) приобретает вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_A}{\rho\partial\vartheta}=N\Bigg\{&\frac{r\sin(\vartheta-\theta)}{\rho^2-2\rho r\cos(\vartheta-\theta)+r^2}+\\&+\frac{r'\sin(\vartheta-\theta)}{\rho^2-2\rho r'\cos(\vartheta-\theta)+r'^2}-\frac{2r\sin\theta}{r^2-2\rho\cos\theta+1}\Bigg\}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Наконец подставляем (4) и (6) в равенства (20) предыдущего параграфа. Таким образом, замечая, что $d\sigma_A=rd\theta dr$, получаем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}=\frac{1}{4\pi c^2}\Bigg\{&\int\int\frac{N}{H}\frac{\rho-r\cos(\vartheta-\theta)}{\rho^2-2\rho r\cos(\vartheta-\theta)+r^2}rd\theta dr+\\&+\int\int\frac{N}{H}\frac{\rho-r'\sin(\vartheta-\theta)}{\rho^2-2\rho r'\cos(\vartheta-\theta)+r'^2}rd\theta dr-\int\int\frac{1}{\rho}\frac{N}{H}rd\theta dr\Bigg\};\\ \frac{\partial\varphi_1}{\rho\partial\vartheta}=\frac{1}{4\pi c^2}\Bigg\{&\int\int\frac{N}{H}\frac{r\sin(\vartheta-\theta)}{\rho^2-2\rho r\cos(\vartheta-\theta)+r^2}rd\theta dr+\\&+\int\int\frac{N}{H}\frac{r'\sin(\vartheta-\theta)}{\rho^2-2\rho r'\cos(\vartheta-\theta)+r'^2}rd\theta dr-2\int\int\frac{N}{H}\frac{r^2\sin\theta d\theta dr}{\rho(r^2-2r\cos\theta+1)}\Bigg\}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

В этих равенствах, как уже было указано,

$$r'=\frac{1}{r}. \tag{8}$$

Кроме того функция $\frac{N}{H}$, входящая в подинтегральное выражение, есть функция точки A или, что то же, может быть выражена в полярных координатах этой точки r и θ.

§ 9. На основании равенства (12) § 1 имеем

$$N=N(x,y)=\frac{\partial V_0^2}{\partial x}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0^2}{\partial y}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}, \tag{1}$$

откуда в силу общих теорем векторного анализа

$$N = \left\{\frac{\partial V_0^2}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + \frac{\partial V_0^2}{\partial \eta}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta}\right\} H, \tag{2}$$

где V_0, φ_0 те же функции, что и в равенстве (1), только выраженные через переменные ξ, η, а H определяется из (6) § 3. Итак:

$$\frac{N}{H} = \frac{\partial V_0^2}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + \frac{\partial V_0^2}{\partial \eta}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta}. \tag{3}$$

С другой стороны, если $f_0 = \varphi_0 + i\psi_0$ — комплексная функция потока несжимаемой жидкости около рассматриваемого нами крыла, то сопряженная скорость потока

$$\overline{W_0} = \frac{df_0}{dz} = \frac{\frac{df_0}{d\zeta}}{\frac{dz}{d\zeta}}$$

и, следовательно,

$$V_0^2 = |W_0|^2 = \frac{\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2}{\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2} = H\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2. \tag{4}$$

Дифференцируя это по переменным ξ и η получаем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V_0^2}{\partial \xi} &= \frac{\partial H}{\partial \xi}\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 + H\frac{\partial}{\partial \xi}\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 \\ \frac{\partial V_0^2}{\partial \eta} &= \frac{\partial H}{\partial \eta}\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 + H\frac{\partial}{\partial \eta}\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

После чего, подставляя это в равенство (3), будем иметь:

$$\frac{N}{H} = \left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 \left(\frac{\partial H}{\sigma \xi}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + \frac{\partial H}{\partial \eta}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta}\right) + H\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2\right). \tag{6}$$

Итак, все сводится к вычислению двух скаляров

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \operatorname{grad} H \cdot \operatorname{grad} \varphi_0 = \frac{\partial H}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + \frac{\partial H}{\partial \eta}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \\ \Delta_2 &= \operatorname{grad} \varphi_0 \cdot \operatorname{grad}\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left|\frac{df^0}{d\zeta}\right|^2 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

а также более простых выражений H и $\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2$.

Величину H дают нам формулы (4) и (8) § 4. Условимся представлять ее в таком виде:

$$H = e^h, \tag{8}$$

причем очевидно:

$$h = \log H = 4 \log r + 2 \log P(3) - \log P(1) - \log P(2) + \\ + \log \frac{|\gamma|^4}{|\beta|^4 |1 + \gamma|^2}. \tag{9}$$

Вычислим теперь $\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2$, пользуясь равенством:

$$\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 = \mathrm{grad}^2 \varphi_0 = \left(\frac{\partial \varphi_0}{dr}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{r \partial \theta}\right)^2, \tag{10}$$

где $\frac{\partial \varphi_0}{dr}$ и $\frac{\partial \varphi_0}{r\partial \theta}$ суть производные от потенциала φ_0 по r и θ — полярным координатам точки плоскости ζ.

Имеем прежде всего на основании (3) § 5:

$$\varphi_0 + i\psi_0 = \frac{C}{\zeta} + \overline{C}\zeta - ij \log \zeta, \tag{11}$$

причем C полагаем равным:

$$C = C_x + iC_y = |C| e^{i\mu}, \tag{12}$$

величину же $|C|$ — модуль константы диполя в плоскости ζ можем, не ограничивая общности исследования, принимать равным единице.

Так как в данном случае надо положить $\zeta = re^{i\theta}$, то из (11) легко получаем:

$$\varphi_0 = \left(r + \frac{1}{r}\right)(C_x \cos\theta + C_y \sin\theta) + j\theta = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos(\theta - \mu) + j\theta, \tag{13}$$

что дает нам во-первых:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_0}{dr} &= \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\cos(\theta - \mu) \\ \frac{\partial \varphi_0}{r\partial \theta} &= -\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\sin(\theta - \mu) + \frac{j}{r} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

и затем

$$\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 = 1 + \frac{j^2}{r^2} + \frac{1}{r^4} - \frac{2}{r^2}\cos 2(\theta - \mu) - 2\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\frac{j \sin(\theta - \mu)}{r}. \tag{15}$$

Приступаем к вычислению выражения:

$$\Delta_2 = \frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 + \frac{\partial\varphi_0}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 = \frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 + \frac{\partial\varphi_0}{r\partial\theta}\frac{\partial}{r\partial\theta}\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2. \tag{16}$$

Употребляя сокращенные обозначения для производных от φ_0, пишем вместо (10):

$$\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 = \varphi_r^2 + \frac{\varphi_\theta^2}{r^2}, \tag{17}$$

откуда, дифференцируя это

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 &= 2\varphi_r\varphi_{rr} + \frac{2\varphi_\theta\varphi_{\theta r}}{r^2} - 2\frac{\varphi_\theta^2}{r^3} \\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 &= 2\varphi_r\varphi_{r\theta} + \frac{2\varphi_\theta\varphi_{\theta\theta}}{r^2}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

и также в виду (16):

$$\Delta_2 = 2\left\{\varphi_r^2\varphi_{rr} + 2\frac{\varphi_r\varphi_\theta\varphi_{r\theta}}{r^2} + \frac{\varphi_\theta^2\varphi_{\theta\theta}}{r^4} - \frac{\varphi_r\varphi_\theta^2}{r^3}\right\}. \tag{19}$$

Причем при написании сокращенных обозначений для производных от φ_0 мы везде опускаем индекс 0 при φ.

Формулы (14) после дифференцирования дают нам

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{rr} &= \frac{2\cos(\theta-\mu)}{r^3} \\ \varphi_{r\theta} &= -\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\sin(\theta-\mu) \\ \varphi_{\theta\theta} &= -\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos(\theta-\mu). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Следовательно, подставляя это в (19), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_2 = \frac{4\cos(\theta-\mu)}{r^7}&\{-4r^4\sin^2(\theta-\mu) + (r^2-1)^2 + \\ &+ j\sin(\theta-\mu)(r^5+4r^3-r) - j^2r^4\}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Обращаемся теперь к вычислению выражения:

$$\Delta_1 = \frac{\partial H}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi} + \frac{\partial H}{\partial\eta}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\eta} = \frac{\partial H}{\partial r}\frac{\partial\varphi_0}{\partial r} + \frac{\partial H}{r\partial\theta}\frac{\partial\varphi_0}{r\partial\theta}. \tag{22}$$

Так как $H = e^h$, то прежде всего

$$\Delta_1 = H\left(\frac{\partial h}{\partial r}\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{\partial h}{r\partial\theta}\frac{\partial\varphi_0}{r\partial\theta}\right) = Hd_1, \tag{23}$$

причем нами введено обозначение

$$d_1 = \frac{\partial h}{\partial r}\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{\partial h}{r\partial\theta}\frac{\partial\varphi_0}{r\partial\theta}. \tag{24}$$

Согласно (9) имеем:

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{4}{r}\frac{\partial r}{\partial r} + \frac{2}{P(3)}\frac{\partial P(3)}{\partial r} - \frac{1}{P(1)}\frac{\partial P(1)}{\partial r} - \frac{1}{P(2)}\frac{\partial P(2)}{\partial r},$$
$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = \frac{4}{r}\frac{\partial r}{\partial \theta} + \frac{2}{P(3)}\frac{\partial P(3)}{\partial \theta} - \frac{1}{P(1)}\frac{\partial P(1)}{\partial \theta} - \frac{1}{P(2)}\frac{\partial P(2)}{\partial \theta};$$

где член с $\frac{\partial r}{\partial\theta} = 0$ написан исключительно для того, чтобы выяснить однородное строение выражения. Подставляя эти равенства в (24), можем написать

$$d_1 = d_1' + d_1'' + d_1''' + d_1'''', \tag{25}$$

причем:

$$\left.\begin{aligned}
d_1' &= \frac{4}{r}\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta}\frac{\partial r}{\partial\theta}\right\} = \frac{4}{r}\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\\
d_1'' &= \frac{2}{P(3)}\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\frac{\partial P(3)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta}\frac{\partial P(3)}{\partial\theta}\right\}\\
d_1''' &= -\frac{1}{P(1)}\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\frac{\partial P(1)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta}\frac{\partial P(1)}{\partial\theta}\right\}\\
d_1'''' &= -\frac{1}{P(2)}\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\frac{\partial P(2)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta}\frac{\partial P(2)}{\partial\theta}\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Пользуясь равенствами (14) настоящего параграфа и (6) § 4, легко вычисляем:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\frac{\partial P(n)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta}\frac{\partial P(n)}{\partial\theta} = 2\left\{\left(r - \frac{1}{r}\right)\cos(\theta - \mu) + \right.\\
&\left. + \frac{jr_n}{r}\sin(\theta - \theta_n) - r_n\cos(\mu - \theta_n) + \frac{r_n}{r^2}\cos(2\theta - \theta_n - \mu)\right\},
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

или, вводя обозначение:

$$\left.\begin{aligned}
Q(n) = r(r^2 - 1)\cos(\theta - \mu) + jr_n r\sin(\theta - \theta_n) - \\
- r^2 r_n\cos(\mu - \theta_n) + r_n\cos(2\theta - \theta_n - \mu),
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

представим то же самое следующим образом:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\frac{\partial P(n)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta}\frac{\partial P(n)}{\partial\theta} = \frac{2Q(n)}{r^2}. \tag{28'}$$

При помощи этой последней формулы равенства (26) получают вид:

$$\left.\begin{aligned} d_1' &= \frac{4}{r^3}(r^2-1)\cos(\theta-\mu) \\ d_1'' &= \frac{4Q(3)}{r^2 P(3)} \\ d_1''' &= -\frac{2Q(1)}{r^2 P(1)} \\ d_1'''' &= -\frac{2Q(2)}{r^2 P(2)}. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

На основании этих соотношений вычисляем сначала d_1', d_1'', d_1''' и d_1'''', чтобы затем при помощи (25) определить d_1. Зная же d_1, мы, пользуясь (23), находим Δ_1.

Величину Δ_2 даст нам (21).

Остается показать, как вычисляется при помощи найденных величин выражение $\frac{N}{H}$. С этой целью, подставляя (7) в (6), мы будем сначала иметь:

$$\frac{N}{H} = \left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 \Delta_1 + \Delta_2 \tag{30}$$

или, пользуясь также (23):

$$\frac{N}{H} = H\left\{\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 d_1 + \Delta_2\right\}, \tag{31}$$

где $\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2$ можно найти из (15), которую перепишем здесь в таком виде:

$$\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 = \frac{r^4 + j^2 r^2 + 1 - 2r^2\cos 2(\theta-\mu) - 2r(r^2+1)\sin(\theta-\mu)}{r^4}. \tag{32}$$

Обратим внимание на строение выражения, получившегося у нас таким образом для $\frac{N}{H}$. Множитель H в нем есть рациональная функция от r, $\cos\theta$ и $\sin\theta$. То же самое на основании (29), (32) и (21) относится и к остальным членам, входящим в правую часть равенства (31). Таким образом $\frac{N}{H}$ в целом тоже выражается рационально через r, $\cos\theta$ и $\sin\theta$. При этом, как нетрудно убедиться, в знаменатель этого рационального выражения будут входить исключительно множители $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ и r.

§ **10.** Обратимся теперь к вопросу о сходимости интегралов, фигурирующих в наших вычислениях. В настоящей статье мы только перечислим

относящиеся сюда теоремы, опуская их доказательство, которое будет приведено в другой более подробной работе, посвященной тому же вопросу.

По вопросу о сходимости интеграла, входящего в формулу (1) § 2, можно доказать, что интеграл

$$\iint_{\Omega} N(x, y)\, d\sigma, \tag{1}$$

распространенный на область потока не будет, безусловно, сходиться. Однако, если мы вычислим тот же интеграл, распространивши его по конечной площади, заключенной между контуром крыла и охватывающей этот контур окружностью, описанной из начала координат достаточно большим радиусом R, и если затем мы будем увеличивать R до бесконечности ($R \rightarrow \infty$), то, как это можно доказать, интеграл наш будет иметь определенный предел, который мы и называем условным значением интеграла (1), распространенного на область потока Ω.

Применяя такой же прием суммирования по концентрическим окружностям, мы оказываемся в состоянии вычислить сначала интеграл, входящий в равенство (1) § 2, а затем также интеграл равенства (6) того же параграфа.[1]

Доказавши суммируемость интегралов, можно показать также, что, дифференцируя их по координатам точки C, мы имеем право применять правило дифференцирования под знаком интеграла; после чего уже нетрудно убедиться, что вычисленные таким образом значения интегралов дают нам решение той задачи, которую мы исследуем.

Несколько более сложным оказывается исследование интегралов, распространенных по площади окружности $|\zeta| = 1$. К таким интегралам относятся интегралы (7) § 3, интегралы (20) § 7 и, наконец, интегралы (7) § 8. Все они получаются после дифференцирования по координатам точки C интеграла

$$\iint \frac{\varphi_A}{H}\, d\sigma_A, \tag{2}$$

распространенного в плоскости ζ по площади окружности $|\zeta| = 1$.

[1] Относительно этого последнего интеграла сотрудники ЦАГИ М. В. Келдыш и Ф. И. Франкль показали, что интеграл этот при известном выборе константы, входящей в φ_A, даже, безусловно сходится. Им удалось также обобщить перечисляемые нами теоремы и показать, что, повторяя указанный в тексте процесс приближений достаточное число раз, мы в пределе получим точное решение задачи об обтекании крыла сжимаемой жидкостью.

Работа Келдыша и Франкля, о которой они сделали доклад на собрании сотрудников ЦАГИ 4 V 1933 г., подготовляется к печати.

При определении этих интегралов, включая, конечно, и интеграл (2), возникают затруднения с вопросом об их сходимости в точке $\zeta = 0$.

Если интегралы, распространенные по области потока в плоскости z, естественно изучать начиная с интеграла (1), то для интегралов в плоскости ζ ту же роль играет интеграл:

$$\int\int \frac{N}{H} d\sigma, \tag{3}$$

распространенный по площади окружности $|\zeta| = 1$ и получающийся из интеграла (1) при помощи преобразования переменных x, y (координат плоскости z) в ξ, η (координаты плоскости ζ).

Интеграл (3) в точке $\zeta = 0$ так же, как и интеграл (1) в точке $z = \infty$ не безусловно сходящийся. Если однако просуммировать этот интеграл, распространив его сначала на площадь плоскости ζ, заключенную между окружностью $|\zeta| = 1$ и контуром E_R, соответствующим в плоскости ζ окружности $|z| = R$, плоскости z, то значение этого интеграла при переходе к пределу $R \rightarrow \infty$, или, что то же, $E_R \rightarrow 0$ будет тоже стремиться к пределу и притом предел этот будет равен значению интеграла (1), полученному выше.

Для того, чтобы убедиться в сказанном, достаточно заметить, что интегралы, вычисленные таким образом в плоскости ζ, не отличаются от интегралов по концентрическим окружностям, которые мы вычисляли в плоскости z, суммируя (1).

С другой стороны, контур E_R при $R \rightarrow \infty$ становится все больше и больше похож на окружность бесконечно малого радиуса, описанную в плоскости ζ из центра $\zeta = 0$. Естественно поэтому попытаться заменить условное интегрирование по контурам E_R условным интегрированием по окружностям $|\zeta| = \rho$.

Мысль эта вполне себя оправдывает и оказывается возможным доказать следующую теорему:

Вычислив интеграл (3) по площади кольца плоскости ζ, заключенного между окружностями $|\zeta| = 1$ и $|\zeta| = \rho$ и перейдя к пределу при $\rho \rightarrow 0$, мы получим для (3) условную величину, которая не будет отличаться от величины интеграла (1), распространенного на область потока, вычисленного при помощи интегрирования по концентрическим окружностям $|z| = R$.

Доказав эту основную теорему, нетрудно показать, что тот же процесс условного интегрирования дает нам определенные значения и для дру-

гих интегралов из числа перечисленных выше. Дальше можно, и весьма нетрудно, показать, что к этим интегралам применимо правило дифференцирования под знаком интеграла и, наконец, что они, формально составленные так, чтобы удовлетворять условиям задачи, вместе с тем дают и ее действительное решение.

В частности многие из этих интегралов сходятся также и безусловно и в том числе интеграл (2), как это непосредственно следует из упоминавшейся теоремы Келдыша и Франкля. Однако применение условного интегрирования все-таки целесообразно, так как только применяя такое интегрирование, мы оказываемся в состоянии интегрировать наши интегралы почленно, как это, например, предполагается возможным в формулах (7) § 8. Без почленного же интегрирования при практической работе обойтись невозможно.

§ 11. В дополнение к полиномам канонического вида $P(1)$, $P(2)$ и $P(3)$, рассмотренным в § 4, вводим еще два полинома:

$$\left.\begin{aligned} P(C) &= r^2 - 2r\rho\cos(\theta - \vartheta) + \rho^2 \\ P(C') &= r^2 - 2r\rho'\cos(\theta - \vartheta) + \rho'^2, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где:

$$\rho' = \frac{1}{\rho}. \quad (2)$$

Полиномы эти очевидно имеют тоже каноническую форму и их можно получить из равенства (6) § 4, положивши последовательно $\zeta_n = \rho e^{i\vartheta}$ и $\zeta_n = \rho' e^{i\vartheta}$. Разница между этими полиномами и теми, которые нами рассмотрены раньше, та, что, например, в полиноме $P(1)$ величина $\zeta_n = r_1 e^{i\theta_1}$ есть определенное число, а в полиноме $P(C)$ величина $\zeta_n = \rho e^{i\vartheta}$ — число, которое по условиям задачи можно еще изменять.

Эта разница выражена нами тем, что у полиномов первого рода в скобках написаны определенные числа, у полиномов же $P(C)$ и $P(C')$ в скобках стоят C и C', т. е. значки точек, от координат которых они зависят.

Обычно полиномы $P(C)$ и $P(C')$ будут у нас входить в произведения с другими полиномами, например $P^2(1)P^2(2)P(C)$, $P^2(1)P(3)P(C')$ и т. п. Условимся в этих случаях располагать полиномы $P(C)$ и $P(C')$ на последнем месте, вводя их таким образом в вычисления в самую последнюю очередь.

Пользуясь всеми этими соглашениями и замечая, что, согласно (8) § 8:

$$\rho^2 - 2\rho r' \cos(\vartheta - \theta) + r'^2 = \frac{\rho^2}{r^2} P(C')$$

равенства (7) § 8 можно переписать:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}&=\frac{1}{4\pi c^2}\left\{\int\int r\frac{N}{H}\frac{\rho-r\cos(\theta-\vartheta)}{P(C)}d\theta\,dr+\right.\\&+\int\int\frac{r^3}{\rho^2}\frac{N}{H}\frac{\rho-r'\cos(\theta-\vartheta)}{P(C')}d\theta\,dr-\left.\int\int\frac{r}{\rho}\frac{N}{H}d\theta\,dr\right\};\\\frac{\partial\varphi_1}{\rho\partial\vartheta}&=-\frac{1}{4\pi c^2}\left\{\int\int r^2\frac{N}{H}\frac{\sin(\theta-\vartheta)}{P(C)}d\theta\,dr+\right.\\&+\int\int\frac{r^2}{\rho^2}\frac{N}{H}\frac{\sin(\theta-\vartheta)}{P(C')}d\theta\,dr+2\int\int\frac{r^2}{\rho}\frac{N}{H}\frac{\sin\theta}{P(1)}d\theta\,dr,\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

где все интегралы распространены по площади единичного круга $|\zeta|=1$.

§ 12. На основании сказанного в конце § 9 нетрудно усмотреть, что интегралы, входящие в равенство (4) предыдущего параграфа, сводятся к сумме интегралов вида:

$$I=\int_0^r r\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{A(\cos\theta,\sin\theta)}{r^e P^{m_1}(j_1)P^{m_2}(j_2)\ldots P^{m_k}(j_k)}d\theta,\quad(1)$$

причем числитель подинтегрального выражения:

$$\frac{A(\cos\theta,\sin\theta)}{r^e P^{m_1}(j_1)P^{m_2}(j_2)\ldots P^{m_k}(j_k)}\quad(2)$$

есть некоторый целый многочлен от $\cos\theta$, $\sin\theta$, коэффициенты которого суть целые многочлены от r, а знаменатель — произведение некоторой целой степени от r на трехчлены канонического вида, введенные в § 4 [см. формулу (6)]; в число этих последних трехчленов могут входить также и два множителя (1) § 11.

Знаменатель выражения (2), следовательно, есть также целый многочлен от $\cos\theta$, $\sin\theta$, коэффициенты которого суть целые функции от r.

Для доказательства сказанного заметим прежде всего, что произведение двух выражений вида (2) представляет собою опять-таки выражение такого же вида.

Напишем затем согласно (31) § 9:

$$\frac{N}{H}=H\left\{\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 d_1+\Delta_2\right\}.\quad(3)$$

В произведении, стоящем в правой стороне этого равенства, первый множитель H, согласно (8) § 4, принадлежит к выражениям вида (2).

То же самое можно сказать сначала на основании (32), (25) и (29) § 9 относительно слагаемого $\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 d_1$ и затем на основании (21) § 9 относительно Δ_2. В целом, следовательно, выражение $\frac{N}{H}$ есть сумма членов вида (2).[1]

Заметив это и подставив полученное для $\frac{N}{H}$ выражение в интегралы (4) § 11, убеждаемся, что они также имеют требуемый вид (1).

§ **13.** Для вычисления интегралов вида (1) предыдущего параграфа сосредоточим первоначально наше внимание на исследовании интегралов:

$$U = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{A(\cos\theta,\ \sin\theta)\, d\theta}{P^{m_1}(j_1)\, P^{m_2}(j_2)\ldots P^{m_k}(j_k)}, \tag{1}$$

где

$$P(j_i) = r^2 - 2rr_{j_i}\cos(\theta - \theta_{j_i}) + r_{j_i}^2, \tag{2}$$

показатели $m_1, m_2, \ldots m_k$ — целые положительные числа и, наконец, $A(\cos\theta,\ \sin\theta)$ — целый многочлен от $\cos\theta$, $\sin\theta$ степени n.

Для рационализации интеграла полагаем как обычно:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t; \quad \theta = 2\operatorname{arc\,tg} t; \quad d\theta = \frac{2dt}{t^2+1} \tag{3}$$

и, следовательно:

$$\cos\theta = -\frac{t^2-1}{t^2+1}; \quad \sin\theta = \frac{2t}{t^2+1}. \tag{4}$$

Эти равенства позволяют функцию $A(\cos\theta,\ \sin\theta)$ представить в таком виде:

$$A(\cos\theta,\ \sin\theta) = \frac{A(t)}{(t^2+1)^n}, \tag{5}$$

где $A(t)$ — целый многочлен от t, степень которого не превосходит $2n$ и коэффициенты которого суть целые многочлены от r; знаменатель же $(t^2+1)^n$ в интервале интегрирования: $-\pi \leqslant \theta \leqslant +\pi$ или

$$-\infty \leqslant t \leqslant +\infty$$

не обращается в нуль.

[1] Следует тут же предостеречь от желания привести эти члены к одному знаменателю и объединить их в одну дробь. Это только усложнило бы наши вычисления.

Имеем затем для любого многочлена

$$P(j) = r^2 - 2rr_j \cos(\theta - \theta_j) + r_j^2 \tag{6}$$

выражая в нем θ через t:

$$P(j) = \frac{P_j(t)}{t^2+1}, \tag{7}$$

где

$$P_j(t) = A_j t^2 + B_j t + C_j \tag{8}$$

многочлен стандартного вида, коэффициенты которого

$$\left.\begin{aligned} A_j &= r^2 + 2rr_j \cos\theta_j + r_j^2 \\ B_j &= -4rr_j \sin\theta_j \\ C_j &= r^2 - 2rr_j \cos\theta_j + r_j^2. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Решая уравнение $P_j(t) = 0$ относительно t имеем для его корней

$$\left.\begin{aligned} \alpha_j &= \alpha_{j,x} + i\alpha_{j,y} = \frac{2rr_j \sin\theta_j + i(r^2 - r_j^2)}{r^2 + 2rr_j \cos\theta_j + r_j^2} \\ \beta_j &= \bar{\alpha}_j = \alpha_{j,x} - i\alpha_{j,y} = \frac{2rr_j \sin\theta_j - i(r^2 - r_j^2)}{r^2 + 2rr_j \cos\theta_j + r_j^2}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

При помощи равенств (5) и (7) интеграл (1) легко представить:

$$U = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(t)\,dt}{(t^2+1)^{m_0} P_{j_1}^{m_1}(t) P_{j_2}^{m_2}(t) \ldots P_{j_k}^{m_k}(t)}, \tag{11}$$

где степень m_0 множителя t^2+1 в знаменателе должна равняться

$$m_0 = n + 1 - m_1 - m_2 - \ldots - m_k \tag{12}$$

и в зависимости от обстоятельств может быть как положительным, так и отрицательным числом.

Вообще говоря m_0 всегда таково, что интеграл (11), несмотря на свои бесконечные пределы интегрирования, может быть взят.

В самом деле степень $A(t)$ самое большее $2n$, следовательно, степень относительно t всего подинтегрального выражения самое большее:

$$2n - 2m_0 - 2m_1 - 2m_2 - \ldots - 2m_k; \tag{13}$$

т. е. для $t \to \infty$ подинтегральное выражение ведет себя как C/t^s, где $s \geq 2$.

Для большей симметрии в обозначениях полезно положить

$$P_0(t) = A_0 t^2 + B_0 t + C_0 = t^2 + 1, \tag{14}$$

причем следует помнить, что многочлен второй степени $P_0(t)$ имеет структуру, отличающую его от многочленов канонического вида $P_1(t)$, $P_2(t)$ и т. д., которые все зависят не только от t, но и от r.

Интеграл (11) при помощи (14) можно представить

$$U = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(t)\,dt}{P_0^{m_0}(t)\,P_{j_1}^{m_1}(t)\,P_{j_2}^{m_2}(t)\ldots P_{j_k}^{m_k}(t)}. \tag{15}$$

Применяя теперь общие положения теории разложения рациональных дробей на элементы, можем написать:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{A(t)}{P_0^{m_0}(t)\,P_{j_1}^{m_1}(t)\ldots P_{j_k}^{m_k}(t)} = \frac{M_{0,m_0}\,t + N_{0,m_0}}{P_0^{m_0}(t)} + \\
&+ \frac{M_{0,m_0-1}\,t + N_{0,m_0-1}}{P_0^{m_0-1}(t)} + \ldots + \frac{M_{0,1}\,t + N_{0,1}}{P_0(t)} + \\
&+ \frac{M_{1,m_1}\,t + N_{1,m_1}}{P_{j_1}^{m_1}(t)} + \ldots + \frac{M_{1,1}\,t + N_{1,1}}{P_{j_1}(t)} + \\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \frac{M_{k,m_k}\,t + N_{k,m_k}}{P_{j_k}^{m_k}(t)} + \ldots + \frac{M_{k,1}\,t + N_{k,1}}{P_{j_k}(t)}.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Причем свободный член, на основании сказанного выше о числе m_0, в этом разложении должен отсутствовать.

Известно, что при разложении дроби на элементы над коэффициентами многочленов производятся только рациональные операции. Так как у нас коэффициенты эти рациональные функции от r, то в результате, выражения для M_{0,m_0}, N_{0,m_0}, M_{0,m_0-1}, N_{0,m_0-1}, ... $M_{j_k,1}$, $N_{j_k,1}$ тоже должны оказаться такими же функциями. Ниже мы убедимся, что эти выражения суть рациональные дроби, в знаменателях которых в качестве множителей фигурирует только некоторая целая степень от r и затем еще вполне определенные множители второй степени от r.

Каждый из членов разложения (16) интегрируется по t без всякого труда. Небольшие препятствия возникают только от того, что интегриро-

вание в нашем случае ведется между пределами $-\infty$ и $+\infty$ и некоторые интегралы при этом оказываются несобственными. В сумме, однако, как это непосредственно следует из того, что было сказано выше, интегралы эти должны балансироваться так, что в окончательном результате получается собственный интеграл.

Так как, однако, интегрируя один член, разумеется, весьма неудобно одновременно балансировать его с другими, то при вычислениях большую пользу приносит теорема, которую можно формулировать следующим образом:

если мы будем определять величину условно сходящихся интегралов при помощи равенства:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{+a} f(t)\,dt, \tag{17}$$

что в нашем случае возможно и дает для всех интегралов определенные конечные величины, то, интегрируя разложение (16) *почленно и суммируя получившиеся величины, мы получим в результате величину интеграла, стоящего в равенстве* (15).

Доказательство этой теоремы весьма несложно и читатели без затруднений смогут выполнить его сами.

§ **14.** Вычисление интеграла (1) § 13 сводится таким образом к вычислению интегралов вида

$$G_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Mt + N}{P_j^m(t)}\,dt, \tag{1}$$

где:

$$P_j(t) = A_j t^2 + B_j t + C_j, \tag{2}$$

и также интегралов:

$$H_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Mt + N}{P_0^m(t)}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Mt + N}{(t^2 + 1)^m}\,dt, \tag{3}$$

которые, как убедимся дальше, никаких новых затруднений в данном случае не создадут.

Напомним вкратце как вычисляются интегралы (1).

Пользуясь равенствами (8) и (10) § 13, без труда получаем

$$P_j(t) = A_j(t - \alpha_j)(t - \bar{\alpha}_j) = A_j\left\{(t - \alpha_{j\,x})^2 + \alpha^2_{j\,y}\right\}. \tag{14}$$

Введя поэтому новое переменное интегрирование

$$u = \frac{t - \alpha_{j,x}}{\alpha_{j,y}}, \tag{5}$$

причем $\alpha_{j,y}$ мы вправе считать положительным числом, представляем интеграл (1) в новом виде:

$$G_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Mu + \frac{N + M\alpha_{j,x}}{\alpha_{j,y}}}{A_j^m \alpha_{j,x}^{2m-2} (u^2 + 1)} du. \tag{6}$$

Все сводится таким образом к вычислению интегралов:

$$\left.\begin{aligned} U_m &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(u^2+1)^m} \\ I_m &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{udu}{(u^2+1)^m}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

зная которые G_m можно вычислить, пользуясь формулой:

$$G_m = \frac{M}{A_j^m \alpha_{j,y}^{2m-2}} I_m + \frac{N + M\alpha_{j,x}}{A_j^m \alpha_{j,y}^{2m-2}} U_m, \tag{8}$$

а H_m при помощи равенства:

$$H_m = MI_m + NU_m. \tag{9}$$

Интеграл U_m нетрудно вычислить для любого целого m. Находим таким образом

$$\left.\begin{aligned} &U_1 = \pi; \quad U_2 = \frac{\pi}{2}; \quad U_3 = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2}\pi \\ &U_4 = \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2}\pi; \\ &U_m = \frac{(2m-3)(2m-5)\ldots 3 \cdot 1}{(2m-2)(2m-4)\ldots 4 \cdot 2}\pi. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

То есть для U_m мы получаем выражения, почти совпадающие с теми, которые даются в интегральном исчислении для интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx.$$

Интегралы I_m абсолютно сходятся только для значений $m > 1$.

Легко показать, что

$$I_m = 0 \tag{11}$$

для значений $m = 2, 3, 4 \ldots$ Для $m = 1$ интеграл I_m—не безусловно сходящийся, и на основании того, что сказано выше, в этом случае ему следует приписывать условное значение, которое, как нетрудно вычислить, тоже равно нулю. Итак

$$I_1 = 0. \tag{12}$$

Замечая теперь, что согласно (10) § 13

$$\alpha_{j,x} = \frac{2rr_j \sin\theta_j}{A_j}; \quad \alpha_{j,y} = \frac{|r^2 - r_j^2|}{A_j} \tag{13}$$

получаем на основании доказанного в этом параграфе

$$\left.\begin{aligned} G_m &= \frac{A_j N + 2rr_j M \sin\theta_j}{A_j^3 |r^2 - r_j^2|^{2m-2}} U_m, \\ H_m &= MU_m, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

причем U_m равно вполне определенной числовой величине, которая дается равенствами (10).

Мы убеждаемся таким образом, что интегрирование по t или, что то же, по θ не вносит в результаты никакой трансцендентной функции от остающегося пока свободным переменного r. Поэтому на основании того, что было сказано в § 13 о строении коэффициентов разложения (16) того же параграфа, мы можем сформулировать следующую теорему:

Интеграл (1) § 13 *представляет собою рациональную функцию от* r.

Ниже мы докажем, что *знаменатель этой функции распадается на вполне определенные множители*, каждый из которых есть или вполне определенный полином второй степени от r, или просто r. Таким образом при дальнейшем интегрировании по r для вычисления интеграла (1) § 12 нам не приходится выполнять наиболее трудной в случае интегрирования рациональных дробей операции: решения уравнения, получающегося от приравнивания знаменателя нулю.

§ 15. В § 13 было показано, что наша задача сводится к интегрированию выражений

$$\frac{A(t)}{P_0^{m_0} P_{j_1}^{m_1} P_{j_2}^{m_2} \ldots P_{j_k}^{m_k}} \tag{1}$$

по переменному t в интервале между пределами $-\infty$ и $+\infty$.

Рассмотрим сначала специальный случай, когда выражение (1) имеет вид:

$$\frac{b_0 t^3 + b_1 t^2 + b_2 t + b_3}{P_j P_k}, \tag{2}$$

причем j и k не равны нулю, т. е. в знаменатель не входит множитель P_0, а коэффициенты b_0, b_1, b_2, b_3 могут быть рациональными функциями от r.

Как обычно имеет место разложение:

$$\frac{b_0 t^3 + b_1 t^2 + b_2 t + b_3}{P_j P_k} = \frac{M_j t + N_j}{P_j} + \frac{M_k t + N_k}{P_k}, \tag{3}$$

где M_j, N_j не зависят от t и, как мы убедимся, суть линейные выражения от b_0, b_1, b_2, b_3, коэффициенты которых рационально зависят от r. Чтобы определить эти выражения, освобождаем равенство (3) от знаменателя и приравниваем коэффициенты при различных степенях t. Таким образом получаются уравнения:

$$\left.\begin{aligned} A_k M_j + A_j M_k &= b_0 \\ B_k M_j + B_j M_k + A_k N_j + A_j N_k &= b_1 \\ C_k M_j + C_j M_k + B_k N_j + B_j N_k &= b_2 \\ C_k N_j + C_j N_k &= b_3. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Определяем отсюда M_j, M_k, N_j, N_k. Прежде всего детерминант коэффициентов при неизвестных будет:

$$\Delta = \Delta(j, k) = \begin{vmatrix} A_k, & A_j, & 0, & 0 \\ B_k, & B_j, & A_k, & A_j \\ C_k, & C_j, & B_k, & B_j \\ 0, & 0, & C_k, & C_j \end{vmatrix} \tag{5}$$

и простое вычисление дает для него:

$$\Delta = (A_k B_j - B_k A_j)(B_k C_j - C_k B_j) - (A_k C_j - C_k A_j)^2. \tag{6}$$

Затем пользуясь равенствами (9) § 13, вычисляем:

$$\left.\begin{aligned} A_k B_j - B_k A_j &= 4r\,[r^2 (r_k \sin\theta_k - r_j \sin\theta_j) + \\ &\quad + 2r r_j r_k \sin(\theta_k - \theta_j) + r_j r_k (r_j \sin\theta_k - r_k \sin\theta_j)] \\ B_k C_j - B_k B_j &= 4r\,[r^2 (r_j \sin\theta_j - r_k \sin\theta_k) + \\ &\quad + 2r r_j r_k \sin(\theta_k - \theta_j) + r_j r_k (r_k \sin\theta_j - r_j \sin\theta_k)] \\ A_k C_j - C_k A_j &= 4r\,[r^2 (r_k \cos\theta_k - r_j \cos\theta_j) + \\ &\quad + r_j r_k (r_j \cos\theta_k - r_k \cos\theta_j)]. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Подставляя это в (6), мы после соответствующих преобразований получим:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta=\Delta(j,\,k)=\\&=-16r^2[r_j^2+r_k^2-2r_jr_k\cos(\theta_k-\theta_j)][r^4-2r^2r_jr_k\cos(\theta_k-\theta_j)+r_j^2r_k^2].\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

В дальнейшем мы будет также употреблять обозначения:

$$\left.\begin{aligned}&E(j/k)=r^2(r_j\sin\theta_j-r_k\sin\theta_k)+2rr_jr_k\sin(\theta_j-\theta_k)+\\&\qquad\qquad+r_jr_k(r_k\sin\theta_j-r_j\sin\theta_k);\\&F(j/k)=r^2(r_j\cos\theta_j-r_k\cos\theta_k)+r_jr_k(r_k\cos\theta_j-r_j\cos\theta_k);\\&G(j/k)=r^2(r_j\sin\theta_j-r_k\sin\theta_k)-2rr_jr_k\sin(\theta_j-\theta_k)+\\&\qquad\qquad+r_jr_k(r_k\sin\theta_j-r_j\sin\theta_k);\\&\Delta(j,\,k)=\\&=-16r^2[r_j^2+r_k^2-2r_jr_k\cos(\theta_k-\theta_j)][r^4-2r^2r_jr_k\cos(\theta_k-\theta_j)+r_j^2r_k^2].\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Заметим, что введенные таким образом символы $E(j/k)$, $F(j/k)$, $G(j/k)$ — суть кососимметрические функции от индексов j, k, т. е. имеют место соотношения: $E(j/k)=-E(k/j)$ и т. п. Символ же $\Delta(j,\,k)$ — есть просто симметрическая функция от этих индексов.

Пользуясь (9) мы можем переписать (7) таким образом:

$$\left.\begin{aligned}&A_kB_j-B_kA_j=4r\,E(k/j)\\&B_kC_j-C_kB_j=-4r\,G(k/j)\\&A_kC_j-C_kA_j=4rF(k/j).\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Вычисляем теперь миноры первого порядка детерминанта (5). Разместим их в таблицу:

$$\left.\begin{aligned}&a_{1j},\ a_{1k},\ d_{1j},\ d_{1k}\\&a_{2j},\ a_{2k},\ d_{2j},\ d_{2k}\\&a_{3j},\ a_{3k},\ d_{3j},\ d_{3k}\\&a_{4j},\ a_{4k},\ d_{4j},\ d_{4k};\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

причем миноры в этой таблице занимают то же положение, которое занимают соответствующие им элементы в детерминанте (5). Таким образом:

$$a_{1j}=\begin{vmatrix}B_j & A_k & A_j\\ C_j & B_k & B_j\\ 0 & C_k & C_j\end{vmatrix};\quad a_{2j}=\begin{vmatrix}A_j & 0 & 0\\ C_j & B_k & B_j\\ 0 & C_k & C_j\end{vmatrix}\ \text{и т. д.}$$

Простое вычисление дает нам сначала равенства:

$$\left.\begin{aligned}
&a_{1j} = B_j(B_k C_j - C_k B_j) - C_j(A_k C_j - C_k A_j);\\
&a_{1k} = -B_k(B_k C_j - C_k B_j) + C_k(A_k C_j - C_k A_j);\\
&d_{1j} = C_j(B_k C_j - C_k B_j);\ \ d_{1k} = -C_k(B_k C_j - C_k B_j);\\
&a_{2j} = -A_j(B_k C_j - C_k B_j);\ \ a_{2k} = A_k(B_k C_j - C_k B_j);\\
&d_{2j} = -C_j(A_k C_j - C_k A_j);\ \ d_{2k} = C_k(A_k C_j - C_k A_j);\\
&a_{3j} = A_j(A_k C_j - C_k A_j);\ \ a_{3k} = -A_k(A_k C_j - C_k A_j);\\
&d_{3j} = C_j(A_k B_j - B_k A_j);\ \ d_{3k} = -C_k(A_k B_j - B_k A_j);\\
&a_{4j} = -A_j(A_k B_j - B_k A_j);\ \ a_{4k} = A_k(A_k B_j - B_k A_j);\\
&d_{4j} = A_j(A_k C_j - C_k A_j) - B_j(A_k B_j - B_k A_j);\\
&d_{4k} = -A_k(A_k C_j - C_k A_j) + B_k(A_k B_j - B_k A_j).
\end{aligned}\right\} \qquad (12')$$

Затем, пользуясь равенствами (10), получаем:

$$\left.\begin{aligned}
&a_{1j} = 4r[B_j G(j/k) + C_j F(j/k)];\\
&a_{1k} = 4r[B_k G(k/j) + C_k F(k/j)];\\
&d_{1j} = 4rC_j G(j/k);\ \ d_{1k} = 4rC_k G(k/j);\\
&a_{2j} = 4rA_j G(k/j);\ \ a_{2k} = 4rA_k G(j/k);\\
&d_{2j} = 4rC_j F(j/k);\ \ d_{2k} = 4rC_k F(k/j);\\
&a_{3j} = 4rA_j F(k(j);\ \ a_{3k} = 4rA_k F(j/k);\\
&d_{3j} = 4rC_j E(k/j);\ \ d_{3k} = 4rC_k E(j/k);\\
&a_{4j} = 4rA_j E(j/k);\ \ a_{4k} = 4rA_k E(k/j);\\
&d_{4j} = 4r[A_j F(k/j) + B_j E(j/k)]\\
&d_{4k} = 4r[A_k F(j/k) + B_k E(k/j)].
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Нетрудно видеть, что вычисленные таким образом миноры детерминанта (5) суть полиномы пятой степени от r. При этом следует также заметить, что каждый из них содержит r в качестве свободного множителя.

После всего сказанного легко определить M_j, M_k, N_j, N_k из уравнений (4), пользуясь общими правилами теории детерминантов. Получаем таким образом:

$$\left.\begin{aligned} M_j &= \frac{b_0 a_{1j} + b_1 a_{2j} + b_2 a_{3j} + b_3 a_{4j}}{\Delta} \\ M_k &= \frac{b_0 a_{1k} + b_1 a_{2k} + b_2 a_{3k} + b_3 a_{4k}}{\Delta} \\ N_j &= \frac{b_0 d_{1j} + b_1 d_{2j} + b_2 d_{3j} + b_3 d_{4j}}{\Delta} \\ N_k &= \frac{b_0 d_{1k} + b_1 d_{2k} + b_2 d_{3k} + b_3 d_{4k}}{\Delta}. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Итак M_j, M_k, N_j и N_k выражаются линейно при помощи коэффициентов b_0, b_1, b_2 и b_3 числителя дроби (2). Так как Δ содержит в качестве свободного множителя r^2, который можно сократить с множителем r, входящим согласно (12) в миноры, то коэффициенты при b_0, b_1, b_2 и b_3 будут рациональными дробями от r с числителем четвертой и знаменателем пятой степени.

В знаменатель этих коэффициентов входят множители r и многочлен

$$\delta(j, k) = r^4 - 2r^2 r_j r_k \cos(\theta_j - \theta_k) + r_j^2 r_k^2. \qquad (14)$$

§ **16.** Рассмотрим также разложение:

$$\frac{b_0 t^3 + b_1 t^2 + b_2 t + b_3}{P_0 P_j} = \frac{M_0 t + N_0}{P_0} + \frac{M_j t + N_j}{P_j}. \qquad (1)$$

В этом случае для опроделения коэффициентов M_0, N_0, M_j, N_j имеем систему линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} A_j M_0 + A_0 M_j &= b_0 \\ B_j M_0 + B_0 M_j + A_j N_0 + A_0 N_j &= b_1 \\ C_j M_0 + C_0 M_j + B_j N_0 + B_0 N_j &= b_2 \\ C_j N_0 + C_0 N_j &= c_3 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

отличающуюся от системы уравнений (4) § 15 только тем, что индексы j, k у букв A, B, C, M и N теперь заменены индексами 0, j.

Детерминант коэффициентов при неизвестных у новой системы уравнений на основании равенства, аналогичного (6) § 15, будет равен:

$$\Delta = \Delta(0, j) = (A_j B_0 - B_j A_0)(B_j C_0 - C_j B_0) - (A_j C_0 - C_j A_0)^2, \quad (3)$$

или, так как согласно (14) § 13 имеем:

$$A_0 = 1; \quad B_0 = 0; \quad C_0 = 1 \tag{4}$$

и, следовательно:

$$\left.\begin{aligned} A_j B_0 - B_j A_0 &= -B_j = 4rr_j \sin\theta_j \\ B_j C_0 - C_j B_0 &= B_j = -4rr_j \sin\theta_j \\ A_j C_0 - C_j A_0 &= A_j - C_j = 4rr_j \cos\theta_j, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

то равенство (3) дает:

$$\Delta = \Delta(0, j) = -16r^2 r_j^2. \tag{6}$$

Для определения из уравнений (2) неизвестных M_0, M_j, N_0, N_j нам необходимо вычислить миноры первого порядка этого детерминанта, которые мы располагаем в аналогичную (11) § 15 таблицу:

$$\left.\begin{matrix} a_{10}, a_{1j}, d_{10}, d_{1j} \\ a_{20}, a_{20j}, d_{20}, d_{2j} \\ a_{30}, a_{3j}, d_{30}, d_{3j} \\ a_{40}, a_{4j}, d_{40}, d_{4j}. \end{matrix}\right\} \tag{7}$$

Величины этих миноров определяются аналогичными (12′) § 15 равенствами:

$$\left.\begin{aligned} &a_{10} = B_0(B_j C_0 - C_j B_0) - C_0(A_j C_0 - C_j A_0); \\ &a_{1j} = -B_j(B_j C_0 - C_j B_0) + C_j(A_j C_0 - C_j A_0); \\ &d_{10} = C_0(B_j C_0 - C_j B_0); \quad d_{1j} = -C_j(B_j C_0 - C_j B_0); \\ &a_{20} = -A_0(B_j C_0 - C_j B_0); \quad a_{2j} = A_j(B_j C_0 - C_j B_0); \\ &d_{20} = -C_0(A_j C_0 - C_j A_0); \quad d_{2j} = C_j(A_j C_0 - C_j A_0); \\ &a_{30} = A_0(A_j C_0 - C_j A_0); \quad a_{3j} = -A_j(A_j C_0 - C_j A_0); \\ &d_{30} = C_0(A_j B_0 - B_j A_0); \quad d_{3j} = -C_j(A_j B_0 - B_j A_0); \\ &a_{40} = -A_0(A_j B_0 - B_j A_0); \quad a_{4j} = A_j(A_j B_0 - B_j A_0); \\ &d_{40} = A_0(A_j C_0 - C_j A_0) - B_0(A_j B_0 - B_j A_0); \\ &d_{4j} = -A_j(A_j C_0 - C_j A_0) + B_j(A_j B_0 - B_j A_0). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Пользуясь (5), а также соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} A_j &= r^2 + 2rr_j\cos\theta_j + r_j^2 \\ B_j &= -4rr_j\sin\theta_j \\ C_j &= r^2 - 2rr_j\cos\theta_j + r_j^2, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

равенства (8) можно представить:

$$\left.\begin{aligned}
a_{10} &= -4rr_j(B_0\sin\theta_j + C_0\cos\theta_j) = -4rr_j\cos\theta_j \\
a_{1j} &= 4rr_j(B_j\sin\theta_j + C_j\cos\theta_j) = 4rr_j(A_j\cos\theta_j - 4rr_j) = \\
&= 4rr_j[r^2\cos\theta_j - 2rr_j(1 + \sin^2\theta_j) + r_j^2\cos\theta_j]; \\
d_{10} &= -4rr_j\sin\theta_j; \\
d_{1j} &= 4rr_jC_j\cos\theta_j = 4rr_j\cos\theta_j[r^2 - 2rr_j\cos\theta_j + r_j^2]; \\
a_{20} &= 4rr_j\sin\theta_j; \\
a_{2j} &= -4rr_jA_j\sin\theta_j = -4rr_j\sin\theta_j[r^2 + 2rr_j\cos\theta_j + r_j^2]; \\
d_{20} &= -4rr_j\cos\theta_j; \\
d_{2j} &= 4rr_jC_j\cos\theta_j = 4rr_j\cos\theta_j[r^2 - 2rr_j\cos\theta_j + r_j^2]; \\
a_{30} &= 4rr_j\cos\theta_j; \\
a_{3j} &= -4rr_jA_j\cos\theta_j = -4rr_j\cos\theta_j[r^2 + 2rr_j\cos\theta_j + r_j^2]; \\
d_{30} &= 4rr_j\sin\theta_j; \\
d_{3j} &= -4rr_jC_j\sin\theta_j = -4rr_j\sin\theta_j[r^2 - 2rr_j\cos\theta_j + r_j^2]; \\
a_{40} &= -4rr_j\sin\theta_j; \\
a_{4j} &= 4rr_jA_j\sin\theta_j = 4rr_j\sin\theta_j[r^2 + 2rr_j\cos\theta_j + r_j^2]; \\
d_{40} &= 4rr_j\cos\theta_j; \\
d_{4j} &= -4rr_j(A_j\cos\theta_j - B_j\sin\theta_j) = -4rr_j(C_j\cos\theta_j + 4rr_j) = \\
&= -4rr_j[r^2\cos\theta_j + 2rr_j(1 + \sin^2\theta_j) + r_j^2\cos\theta_j].
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Величины коэффициентов M_0, N_0, M_j, N_j, определяемые при помощи решения уравнений (2), даются нам сходными с (13) § 15 равенствами:

$$\left.\begin{aligned}
M_0 &= \frac{b_0a_{10} + b_1a_{20} + b_2a_{30} + b_3a_{40}}{\Delta} \\
M_j &= \frac{b_0a_{1j} + b_1a_{2j} + b_2a_{3j} + b_3a_{4j}}{\Delta} \\
N_0 &= \frac{b_0d_{10} + b_1d_{20} + b_2d_{30} + b_3d_{40}}{\Delta} \\
N_j &= \frac{b_0d_{1j} + b_1d_{2j} + b_2d_{3j} + b_3d_{4j}}{\Delta}
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Выражения для a_{10}, a_{1j}, ... a_{4j} имеют, согласно (10), общим множителем $4rr_j$. Сокращая этот множитель с соответствующим множителем знаменателя:

$$\Delta = -16r^2 r_j^2, \tag{6}$$

мы получаем для M_0, M_j, N_0, N_j линейные от b_0, b_1, b_2, b_3 выражения с рационально зависящими от r коэффициентами. Причем каждый из этих коэффициентов есть дробь, в числителе которой стоит полином не выше второй степени от r, а в знаменателе: $-4rr_j$.

§ 17. Равенства (13) § 15 позволяют нам сформулировать следующую теорему:

Теорема 1-я. *Пусть коэффициенты b_0, b_1, b_2, b_3, входящие в числитель дроби*

$$D = \frac{b_0 t^3 + b_1 t^2 + b_2 t + b_3}{P_j(t) P_k(t)}, \tag{1}$$

являются рациональными функциями от r, степень которых не превышает[1] *m и знаменатели которых разлагаются на полиномы целой степени от r: B, C, ... E. Тогда коэффициенты M_j, N_j, M_k и N_k разложения*

$$D = \frac{M_j t + N_j}{P_j(t)} + \frac{M_k t + N_k}{P_k(t)} \tag{2}$$

этой дроби суть тоже рациональные дроби от r, степень которых не превосходит $m - 1$, причем их знаменатели разлагаются на те же множители: B, C ... E и сверх того на множитель:

$$\frac{\Delta}{4r} = -4r\left[r_j^2 + r_k^2 - 2r_j r_k \cos(\theta_j - \theta_k)\right]\left[r^4 - 2r^2 r_j r_k \cos(\theta_j - \theta_k) + r_j^2 r_k\right]. \tag{3}$$

Заметим, что множитель (3) можно представить в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta}{4r} &= -4r\left[r_j^2 + r_k^2 - 2r_j r_k \cos(\theta_j - \theta_k)\right]\left[r^4 - 2r^2 r_j r_k \cos(\theta_j - \theta_k) + r_j^2 r_k^2\right] = \\ &= -4r\left[r_j^2 + r_k^2 - 2r_j r_k \cos(\theta_j - \theta_k)\right]\left[r^2 + 2r\sqrt{r_j r_k}\cos\frac{\theta_j - \theta_k}{2} + \right. \\ &\qquad \left. + r_j r_k\right]\left[r^2 - 2r\sqrt{r_j r_k}\cos\frac{\theta_j - \theta_k}{2} + r_j r_k\right]. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

[1] Степенью рациональной дроби называем разность между степенью числителя и степенью знаменателя; например, степень дроби

$$\frac{b_0 r^n + b_1 r^{n-1} + \ldots + b_{n-1} r + b_n}{a_0 r^m + a_1 r^{m-1} + \ldots + a_{m-1} r + a_m}$$

равна $n - m$. Очевидно, что степень эта в зависимости от обстоятельств может оказаться отрицательной.

В дальнейшем мы будем употреблять следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} A(j, k) = A(k, j) = r^2 + 2r\sqrt{r_j r_k}\cos\frac{\theta_j - \theta_k}{2} + r_j r_k \\ C(j, k) = C(k, j) = r^2 - 2r\sqrt{r_j r_k}\cos\frac{\theta_j - \theta_k}{2} + r_j r_k, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

пользуясь которыми равенство (4) можно переписать так:

$$\frac{\Delta}{4r} = -4r\left[r_j^2 + r_k^2 - 2r_j r_k \cos(\theta_j - \theta_k)\right] A(j, k)\, C(j, k). \tag{6}$$

Это доказывает, что выражение для M_j, N_j, M_k и N_k в (2) в знаменателе кроме множителей B, C, ... E содержат еще в качестве существенных (зависящих от r) множителей: r, $A(j, k)$ и $C(j, k)$.

Аналогичную теорему можно высказать для разложения (1) § 16:

Теорема 2-я. *Пусть коэффициенты b_0, b_1, b_2 и b_3, входящие в числитель правильной дроби:*

$$\frac{b_0 t^3 + b_1 t^2 + b_2 t + b_3}{P_0(t)\, P_j(t)} \tag{7}$$

являются рациональными функциями от r, степень которых не превосходит m и знаменатели которых разлагаются на множители-полиномы целой степени от r: B, C, ... E. Тогда коэффициэнты M_0, N_0, M_j, N_j разложения:

$$\frac{M_0 t + N_0}{P_0(t)} + \frac{M_j t + N_j}{P_j(t)} \tag{8}$$

этой дроби суть рациональные дроби r, степень которых не превосходит $m + 1$, а знаменатели которых разлагаются на перечисленных выше множителей B, C, ... E, а также, сверх того, на множитель:

$$\frac{\Delta}{4r} = -4rr_j. \tag{9}$$

§ 18. Рассмотрим теперь дробь

$$\frac{A(t)}{P_{j_1}^{m_1}(t)\, P_{j_2}^{m_2}(t) \ldots P_{j_k}^{m_k}(t)}, \tag{1}$$

где

$$A(t) = b_0 t^n + b_1 t^{n-1} + b_2 t^{n-2} + \ldots + b_{n-1} t + b_n \tag{2}$$

многочлен целой степени n от t, коэффициенты которого b_0, b_1, ... b_n являются целыми (рациональными) функциями от r, а $P_{j_1}(t)$, ... $P_{j_k}(t)$ стандарт-

ные полиномы вида (8) § 13, один из которых в качестве исключения может равняться $P_0(t)$ и определяться формулой (14) § 13.

Обозначим степень произведения $P_{j_1}^{m_1} P_{j_2}^{m_2} \ldots P_{j_k}^{m_k}$ относительно переменного t через

$$m = 2(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_k). \tag{3}$$

На основании сказанного в § 13 для решения нашей задачи мы можем ограничиться рассмотрением случая, когда

$$n < m. \tag{4}$$

Представим числитель дроби (1) $A(t)$ в виде:

$$\begin{aligned} A(t) = t^3(b_0 t^{n-3} + b_1 t^{n-4} + \ldots + b_{n-4} t) + b_{n-3} t^3 + b_{n-2} t^2 + \\ + b_{n-1} t + b_n = t^3 Q(t) + R(t), \end{aligned} \tag{5}$$

где, очевидно:

$$\left.\begin{aligned} Q(t) = b_0 t^{n-3} + b_1 t^{n-4} + \ldots + b_{n-5} t^2 + b_{n-4} t \\ R(t) = b_{n-3} t^3 + b_{n-2} t^2 + b_{n-1} t + b_n; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

а в знаменателе $P_{j_1}^{m_1} P_{j_2}^{m_2} \ldots P_{j_k}^{m_k}$ выделим произведения *двух каких-нибудь различных множителей*, например P_{j_1} и P_{j_2}:

$$P_{j_1}^{m_1} P_{j_2}^{m_2} \ldots P_{j_k}^{m_k} = (P_{j_1} P_{j_2}) P_{j_1}^{m_1-1} P_{j_2}^{m_2-1} P_{j_3}^{m_3} \ldots P_{j_k}^{m_k}. \tag{7}$$

Имеем таким образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A(t)}{P_{j_1}^{m_1} P_{j_2}^{m_2} \ldots P_{j_k}^{m_k}} = \frac{t^3}{P_{j_1} P_{j_2}} \frac{Q(t)}{P_{j_1}^{m_1-1} P_{j_2}^{m_2-1} P_{j_3}^{m_3} \ldots P_{j_k}^{m_k}} + \\ + \frac{R(t)}{P_{j_1} P_{j_2}} \frac{1}{P_{j_1}^{m_1-1} P_{j_2}^{m_2-1} P_{j_3}^{m_3} \ldots P_{j_k}^{m_k}}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Пользуясь теоремами § 17, можем написать:

$$\left.\begin{aligned} \frac{t^3}{P_{j_1} P_{j_2}} = \frac{m'_{j_1} t + n'_{j_1}}{P_{j_1}} + \frac{m'_{j_2} t + n'_{j_2}}{P_{j_2}} \\ \frac{R(t)}{P_{j_1} P_{j_2}} = \frac{m''_{j_1} t + n''_{j_1}}{P_{j_1}} + \frac{m''_{j_2} t + n''_{j_2}}{P_{j_2}}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

причем коэффициенты $m'_{j_1}, n'_{j_1}, \ldots m''_{j_2}, n''_{j_2}$ рационально выражаются при помощи r и в них входят соответствующие (см. § 17) знаменатели.

Вставляя (9) в (8), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}\frac{A(t)}{P_{j_1}^{m_1} P_{j_2}^{m_2} \dots P_{j_k}^{m_k}} = \frac{Q(t)(m'_{j_1} t + n'_{j_1}) + m''_{j_1} t + n''_{j_1}}{P_{j_1}^{m_1} P_{j_2}^{m_2-1} P_{j_3}^{m_3} \dots P_{j_k}^{m_k}} + \\ + \frac{Q(t)(m'_{j_2} t + n'_{j_2}) + m''_{j_2} t + n''_{j_2}}{P_{j_1}^{m_1-1} P_{j_2}^{m_2} \dots P_{j_{k-1}}^{m_{k-1}} P_{j_k}^{m_k}}.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Таким образом дробь (1) оказывается представленной в виде суммы двух дробей такого же вида. Знаменатели новых дробей разлагаются на те же множители-полиномы $P_{j_1}, P_{j_2}, \dots P_{j_k}$, но только содержат одним множителем меньше. Числители новых дробей полиномы $n - 2$ степени от t, коэффициенты которых рациональные функции от r, могущие содержать в знаменателе множители r, $A(j_1, j_2)$, $C(j_1, j_2)$ и только их. При этом последние два множителя превращаются в единицу, если одно из чисел j_1 или j_2 равно нулю.

Следует заметить, что у новых дробей степень числителя и знаменателя относительно t понизилась на 2, но разница между этими степенями осталась прежняя. Таким образом, если первоначально степень числителя была меньше, чем степень знаменателя, то это соотношение сохранит свою силу и после упрощения. Исключение представляет случай, когда первоначальная степень числителя $n < 3$. В этом случае однако степень числителя у дробей, на которые (1) распадается, равна 1. А так как степень знаменателя никогда не может сделаться меньшей, чем 2, то и здесь степень числителя меньше степени знаменателя.

Указанный процесс мы в состоянии повторять до тех пор, пока в составе знаменателя дроби мы находим различные множители. При этом при каждом повторении число множителей в составе знаменателя дроби уменьшается на единицу. Отсюда следует, что процесс повторения не может продолжаться неопределенно долго, и мы неизбежно должны притти к концу, когда дробь (1) окажется разложенной на сумму дробей со знаменателями, не содержащими различных множителей.

Итак, дробь (1) окончательно представится у нас в таком виде:

$$\left.\begin{aligned}\frac{A(t)}{P_{j_1}^{m_1} P_{j_2}^{m_2} \dots P_{j_k}^{m_k}} = \frac{A_1(t)}{P_{j_1}^{m_1}} + \frac{A_1^{(1)}(t)}{P_{j_1}^{m_1-1}} + \dots \\ + \frac{A_2(t)}{P_{j_2}^{m_2}} + \frac{A_2^{(1)}(t)}{P_{j_2}^{m_2-1}} + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + \frac{A_k(t)}{P_{j_k}^{m_k}} + \dots\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

причем коэффициенты многочленов целой степени от t:

$$A_1(t),\ A_1^{(1)}(t),\ \ldots\ A_2(t),\ \ldots,$$

будут рациональными функциями от r, в знаменатели которых входят множители r, $A(j_1, j_2)$, $C(j_1, j_2)$, $A(j_1, j_3)$ и т. д., и только они.

Приведение дроби (1) к виду (11) при помощи указанного процесса будем называть **первой операцией**. Первая операция вносит в знаменатели коэффициентов у числителей составляющих дробей перечисленные выше множители.

§ 19. В случае, когда $n < m$, при том порядке операций, который указан выше, степень многочлена $A_1(t)$ будет меньше степени знаменателя, т. е. $2m_1$. Чтобы придать разложению вид (16) § 13 произведем алгебраическое деление многочлана $A_1(t)$ на $P_{j_1}(t)$ и обозначив частное через $Q_1(t)$, а остаток через $R_1(t) = M_0 t + N_0$ напишем:

$$A_1(t) = Q_1(t) P_{j_1}(t) + M_0 t + N_0. \qquad (12)$$

Как известно при таком делении в знаменатель коэффициентов у частного и остатка войдет множитель A_{j_1}, т. е. коэффициент при высшем члене полинома стандартного вида:

$$P_{j_1}(t) = A_{j_1} t^2 + B_{j_1} t + C_{j_1}. \qquad (13)$$

Коэффициент этот на основании равенства (9) § 13 равен:

$$A_{j_1} = r^2 + 2rr_{j_1} \cos\theta_{j_1} + r^2_{j_1} \qquad (14)$$

и войдет множителем в знаменатель столько раз, сколько членов в частном, т. е. в общем случае $2m_1 - 3$ раза.

Многочлен $Q_1(t)$, степень которого в общем случае равна $2m_1 - 3$ снова разделим на $P_{j_1}(t)$ и, обозначив новые частные и остаток через $Q_2(t)$ и $R_2(t) = M_2 t + N_1$, напишем:

$$Q_1(t) = Q_2(t) P_{j_1}(t) + M_1 t + N_1, \qquad (15)$$

причем степень $Q_2(t)$, вообще говоря, равна $2m_1 - 5$ и в знаменателе коэффициентов этого многочлена, а также коэффициентов M_1 и N_1, множитель

$$A_{j_1} = r^2 + 2rr_{j_1} \cos\theta_{j_1} + r_{j_1}^2$$

дополнительно входит еще $2m_1 - 5$ раз.

Продолжая действовать описанным образом, получаем частные $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, $Q_3(t)$ и т. д. Причем степень следующего частного на 2 меньше

степени предыдущего. Таким образом доходим до частного $Q_i(t)$, степень которого меньше 2, и которое можно представить поэтому таким образом:

$$Q_i(t) = M_i t + N_i, \qquad (16)$$

где M_i, N_i по прежнему рациональные функции от r.

Имеем следовательно такую систему равенств:

$$\left.\begin{aligned}
A_1(t) &= M_0 t + N_0 + P_{j_1}(t)\,Q_1(t)\\
Q_1(t) &= M_1 t + N_1 + P_{j_1}(t)\,Q_2(t)\\
Q_2(t) &= M_2 t + N_2 + P_{j_1}(t)\,Q_3(t)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
Q_{i-2}(t) &= M_{i-2} t + N_{i-2} + P_{j_1}(t)\,Q_{i-1}(t)\\
Q_{i-1}(t) &= M_{i-1} t + N_{i-1} + P_{j_1}(t)\,Q_i(t)\\
Q_i(t) &= M_i t + N_i.
\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Подставляя каждое следующее равенство этой системы в предыдущее, получаем окончательно:

$$\left.\begin{aligned}
&A_1(t) = M_0 t + N_0 + (M_1 t + N_1)\,P_{j_1}(t) + (M_2 t + N_2)\,P_{j_1}^2(t) +\\
&+ (M_3 t + N_3)\,P_{j_1}^3(t) + \dots \qquad + (M_{i-1} t + N_{i-1})\,P_{j_1}^{i-1} +\\
&+ (M_i t + N_i)\,P_{j_1}^{i}(t).
\end{aligned}\right\} (18)$$

Так как степень n_1 многочлена $A_1(t)$ относительно t в общем случае равна $2m_1 - 1$, то сравнение высших членов равенства (18) дает:

$$n_1 = 2m_1 - 1 = 2i + 1 \qquad (19)$$

или

$$i = m_1 - 1. \qquad (20)$$

Равенство (18) позволяет представить первый член разложения (11) § 18, следующим образом:

$$\frac{A_1(t)}{P_{j_1}^{m_1}(t)} = \frac{M_0 t + N_0}{P_{j_1}^{m_1}(t)} + \frac{M_1 t + N_1}{P_{j_1}^{m_1-1}(t)} + \dots + \frac{M_{m_1-1} t + N_{m_1-1}}{P_{j_1}(t)}. \qquad (21)$$

Проделав то же самое с каждым из членов разложения, придадим ему вид, указанный в равенстве (16) § 13.

Описанный в настоящем параграфе процесс приведения будем называть второй операцией. Вторая операция вносит в знаменатели коэффициентов M_0, N_0, M_1, N_1 и т. д. множители A_{j_1}, A_{j_2}, ... A_{j_k}.

§ **20.** За первой и второй операциями следует, согласно (15) § 13, третья операция — операция интегрирования по переменному t между пределами $-\infty$ и $+\infty$. Операция эта в силу § 14 вносит в знаменатель получающейся в результате интегрирования рациональной дроби сверх перечисленных выше множителей еще следующие множители: A_{j_1}; $|r^2 - r_{j_1}^2|$; A_{j_2}; $|r^2 - r_{j_2}^2|$ и т. д. до A_{j_k}; $|r^2 - r_{j_k}^2|$.

Кратность каждого из этих множителей нетрудно определить, пользуясь объясненным в том же § 14.

В результате, сопоставляя все сказанное относительно первой, второй и третьей операции, получаем следующую теорему:

Теорема: *Интеграл от выражения (1) § 18:*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(t)\,dt}{P_{j_1}^{m_1}(t)\,P_{j_2}^{m_2}(t)\ldots P_{j_k}^{m_k}(t)} \tag{1}$$

совпадающий с точностью до обозначений с интегралом (1) § 13, есть рациональная функция от r, *в знаменатель которой входят множители:* r; $A(j_1, j_2)$, $C(j_1, j_2)$, ... $A(j_{k-1}, j_k)$, $C(j_{k-1}, j_k)$; A_{j_1}, A_{j_2}, ... A_{j_k}; $|r^2 - r_{j_1}^2|$, $|r^2 - r_{j_2}^2|$, $|r^2 - r_{j_3}^2|$, ... $|r^2 - r_{j_{k-1}}^2|$, $|r^2 - r_{jk}^2|$ *и только они.*

Напомним, что при вычислении этой функции не следует складывать отдельные слагаемые, приводя их к общему знаменателю. Такое приведение в состоянии только осложнить дальнейшее интегрирование по r.

§ **21.** Согласно (1) § 12, вычисливши интеграл (1) § 13, мы должны его проинтегрировать по r от 0 до 1. Так как однако мы, согласно доказанному, умеем разложить знаменатели получающихся у нас дробей на элементарные множители, то дальнейшее интегрирование сводится к определенным числовым операциям.

Самый процесс вычисления оказывается достаточно сложным, главным образом благодаря большему числу фигурирующих в нем членов. Вычислениям этим будет посвящена отдельная статья, которая в настоящее время подготовляется нами к печати. Там же мы изложим решение задачи о вычислении сил, действующих на крыло аэроплана в потоке сжимаемой жидкости.

P. A. WALTHER. DER EINFLUSS DER KOMPRESSIBILITÄT DER LUFT WÄHREND DES FLUGES[1]

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Vortrage wird die Bewegung der kompressiblen Flüssigkeit (der Luft) um den Flügel betrachtet, welcher mit der Geschwindigkeit V_∞ fliegt (sieh Fig. 1.) Bezeichnen wir durch φ das Geschwindigkeitspotential der zu betrachtenden Bewegung, die wir auf ein fest mit dem Flügel verbundenes Kartesisches Koordinatensystem beziehen. Durch φ_0 bezeichnen wir das Geschwindigkeitspotential der Bewegung der inkompressiblen Flüssigkeit, welche (d. h. die Bewegung) um denselben Flügel und unter denselben Umständen (d. h. für denselben Wert der Geschwindigkeit und des Anstellwinkels) vor sich geht. Dann bekommen wir vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeiten im ganzen Strömunggebiet klein gegen die Schallgeschwindigkeit sind, leicht die Gleichung:

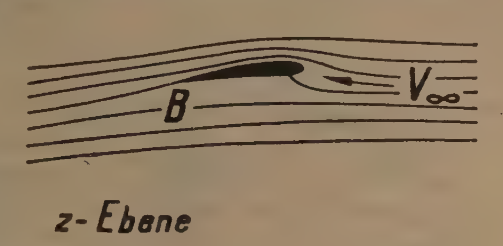


Fig. 1.

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{N(x,y)}{2c^2}, \qquad (1)$$

wo $N(x, y)$ mit der Hilfe der Grössen φ_0 und der Geschwindigkeit der inkompressiblen Flüssigkeit

$$V_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)^2}$$

auf folgende Weise bestimmt wird:

$$N(x, y) = \frac{\partial V_0^2}{\partial x}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0^2}{\partial y}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} \qquad (2)$$

Die Grösse $\frac{N(x,y)}{2c^2}$, welche auf der rechten Seite der Gleichung (1) steht, ist ein annähender Ausdruck für:

$$-\left(u\frac{\partial \log\rho}{\partial x} + v\frac{\partial \log\rho}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{dt}$$

wo ρ die Dichte des Gases und

$$\frac{D}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$$

die Stokessche Ableitung nach der Bewegung des Flüssigkeitsteilchen ist. Diese Grösse ist gleich der Änderung der Einheit der Dichte während der Zeiteinheit mit negativem Zeichen versehen.

[1] Vorgetragen auf Unionskonferenz für Mechanik in Moskau, Mai i. J. 1932.

Wenn wir den Zustand im Punkte $z=\infty$ und die Bedingungen an der Kontur des Flügels beachten, so bekommen wir die folgende Lösung der Gleichung (1):

$$\varphi=\varphi_0+\frac{1}{4\pi c^2}\int\int\varphi_A\,d\sigma_A, \tag{3}$$

wo 1) $d\sigma_A$ ein Flächenelement im Punkte A ist; 2) der während des Integrierens veränderliche Punkt A das ganze Strömunggebiet durchläuft; 3) φ_A eine Potentialfunktion ist, die durch folgende Eigenschaften charakterisiert ist: a) die entsprechende Strömung hat im Punkte A mit der komplexen Koordinate

$$z=z_A=x_A+iy_A$$

eine Quelle von der Stärke $2\pi N(x, y)$; die ebensogrosse Senke liegt im Punkte $z=\infty$; b) die Strömungsgeschwindigkeiten sind an der Flügelkontur tangential gerichtet; c) an der Flügelkante B findet eine Stromungsverzweigung statt.

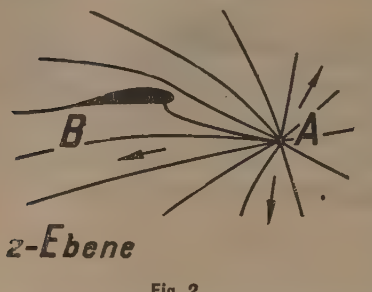


Fig. 2.

Die Gleichung (3) kann man auf folgende Weise interpretieren:

Um die Bewegung der kompressiblen Flüssigkeit zu erhalten muss man in die Strömung, welche uns die Funktion φ_0 gibt, eine Menge von Quellen einsetzen, welche auf dem Flächenelement $d\sigma_A$ des Strömungsgebietes die Stärke

$$\frac{N(x_A, y_A)}{2c^2}\,d\sigma_A=-\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{dt}\,d\sigma_A$$

haben.

Die Strömungen, welche von diesen Quellen hervorgerufen werden, müssen an der Grenze des Flügels tangential gerichtet sein und ausserdem muss die Ecke B des Flügelprofils ihr Verzweigungspunkt sein.

Am bequemsten berechnet man das Integral (3), wenn man die veränderliche Grösse z in ζ transformiert, wo z die komplexe Koordinate $z=x+iy$ der Strömungsebene ist, und $\zeta=\xi+i\eta$ ebensolche Koordinate in der Ebene des Kreises $|\zeta|=1$, auf welchen das Strömungsgebiet mit Hilfe der Gleichung

$$z=f(\zeta) \tag{4}$$

konform abgebildet ist, ist. Dabei setzen wir voraus, dass der Punkt $z=\infty$ und die Flügelkante B der z-Ebene in der ζ-Ebene bzw. den Punkten $\zeta=0$ und $\zeta=1$ entsprechen.

In diesem Vortrage betrachtet Verfasser speziell den Fall, dass der Flügelquerschnitt die Joukowski'sche Form hat. Dann kann man die Gleichung (4) so schreiben:

$$z=\frac{\gamma\zeta+\beta}{\zeta}+\frac{\zeta}{\gamma\zeta+\beta}. \tag{5}$$

Die Grössen γ, β, die in dieser Gleichung stehen, sind irgend welche komplexen Zahlen, die von der Form des Flügels abhängen und der Beziehung

$$\gamma + \beta = 1 \tag{5'}$$

genügen.

Ausserdem muss man die Einheit der Länge in der z-Ebene so wählen, dass der konstante Koeffizient bei z in 1 übergeht und in der Gleichung verschwindet.

Die Funktionen φ_0 und φ_A lassen sich sehr einfach mit der Hilfe der Variablen ζ ausdrücken, wie es aus der Untersuchung der Strömungen, welche sie in der ζ-Ebene geben, unmittelbar zu sehen ist. Und zwar bestimmt sich die Funktion φ_0 aus der Gleichung:

$$\varphi_0 + i\psi_0 = \frac{C}{\zeta} + \bar{C}\zeta - (\bar{C} - C)\log\zeta, \tag{6}$$

wobei man C aus der Gleichung:

$$C = \bar{\dot{W}}_\infty \beta = (u_\infty - iv_\infty)\beta \tag{7}$$

berechnen kann, und $W_\infty = u_\infty + iv_\infty$ die komplexe Grösse ist, die der Geschwindigkeit der Strömung im Punkt $z = \infty$ entspricht.

Die Funktion φ_A gibt uns die Gleichung:

$$\varphi_A + i\psi_A = N\log(\zeta - \zeta_A) + N\log(\zeta - \zeta^*_A) - N\log\zeta - ij\log\zeta. \tag{8}$$

In dieser Gleichung ist:

1) ζ_A die komplexe Koordinate in der ζ-Ebene des Bildes des Punktes A;

2) die Grösse ζ^*_A wird aus der Gleichung

$$\bar{\zeta}_A \zeta^*_A = 1 \tag{8'}$$

bestimmt;

3) N ist die Bedeutung der Funktion $N(x, y)$ für den Punkt A;

4) und die Grösse j, welche der Grösse der Zirkulation J um den Flügel proportional ist ($J = 2\pi j$), wird uns durch die Gleichung:

$$j = \frac{2Nr\cos\theta}{r^2 - 2r\cos\theta + 1} \tag{9}$$

gegeben. Dabei sind r und θ die Polarkoordinaten des Punktes A in der ζ-Ebene, das heisst

$$\zeta_A = re^{i\theta}. \tag{10}$$

Ausserdem drücken wir das Element der Fläche in der z-Ebene $d\sigma_A$, welches in dem Integral der Gleichung (3) figuriert, durch das ihm in der ζ-Ebene entsprechende Element der Fläche ds_A aus. Das gibt uns:

$$d\sigma_A = \frac{1}{H} ds_A, \tag{11}$$

wobei

$$H = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2 = \frac{|\gamma|^4 r^4}{|\beta|^4 \; 1 + \gamma|^2} \frac{P^2(3)}{P(2)\,P(1)}, \tag{12}$$

und $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ die Polynome sind, welche man aus der Gleichung:

$$P(n) = |\zeta - \zeta_n|^2 = r^2 - 2rr_n\cos(\theta - \theta_n) + r^2{}_n \tag{13}$$

bestimmen kann, wenn

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= r_1 e^{i\theta_1} = 1 \\ \zeta_2 &= r_2 e^{i\theta_2} = -\frac{\beta}{1+\gamma} \\ \zeta_3 &= r_3 e^{i\theta_3} = -\frac{\beta}{\gamma}. \end{aligned}\right\} \tag{13'}$$

Die Formeln (6), (8) und (11), in (3) eingesezt, ermöglichen uns φ als eine Funktion zuerst von ζ und dann mit Hilfe (5) von z auszudrücken.

Mit Rücksicht auf all'das Gesagte können wir die folgenden Sätze beweisen:

1) *man kann das Integral, das in der Gleichung* (3) *steht, integrieren, obwohl die zu integrierende Funktion im Punkte* $\zeta = 0$ *unendlich wird; zu diesem Zweck muss man nach Cauchy integrieren, d. h. dieses Integral zuerst im Gebiete zwischen den Kreislinien* $|\zeta| = 1$ *und* $|\zeta| = \rho$ *berechnen und dann Grenze für* $\rho \to 0$ *suchen. Das so berechnete Integral gibt uns die Lösung des Problems und man darf darauf die gewöhnlichen Differentialoperationen anwenden;*

2) *im Falle des Joukowski'schen Flügels kann man die Berechnung der Strömungsgeschwindigkeiten auf Quadraturen von rationalen Funktionen zurückführen und mit Hilfe elementaren algebraischen Prozesse zu Ende führen.*

Wir wollen die Reihe der Berechnungen, welche dabei anzuwenden sind in den Hauptetappen verfolgen.

Bezeichnen wir durch C den zu betrachtenden Punkt der Strömung und unterscheiden ihn dadurch vom Punkte, welcher uns zum Integrieren in der Gleichung (3) dient. Wir bezeichnen weiter mit $\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\vartheta}$ die komplexe Koordinate des Punktes C in der ζ-Ebene und mit $\zeta_A = re^{i\theta}$ ebensolche Koordinate des Punktes A in derselben Ebene.

Ausserdem wollen wir die folgenden Bezeichnungen einführen:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \tag{14}$$

wo

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi c^2}\int\int \varphi_A \, d\sigma_A; \tag{14'}$$

desgleichen setzen wir für die Strömungsgeschwindigkeiten in der z-Ebene:

$$\left.\begin{aligned} W_0 &= \frac{\partial\varphi_0}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} \\ W_A &= \frac{\partial\varphi_A}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi_A}{\partial y} \\ W_1 &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \frac{1}{4\pi c^2}\int\int W_A \, d\sigma_A \\ W &= u + iv = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = W_0 + W_1 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

und, endlich, für die entsprechenden Geschwindigkeiten[1] in der ζ-Ebene

$$\left.\begin{aligned} w_0 &= \frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi} + i\frac{\partial\varphi_0}{\partial\eta} \\ w_A &= \frac{\partial\varphi_A}{\partial\xi} + i\frac{\partial\varphi_A}{\partial\eta} \\ w_1 &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi} + i\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} = \frac{1}{4\pi c^2}\int\int w_A\, d\sigma_A \\ w &= \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + i\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = w_0 + w_1. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Da die Geschwindigheiten W_0 und W_A den Strömungen der inkompressibler Flüssigkeit entsprechen, so haben wir wie gewöhnlich

$$\left.\begin{aligned} \overline{W}_0 &= \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_C \overline{w}_0 \\ \overline{W}_A &= \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_C \overline{w}_A, \end{aligned}\right. \qquad (17')$$

wo man $\frac{d\zeta}{dz}$ für den Punkt C zu berechnen hat, so dass diese Grösse vom Punkt A unabhängig ist. Daraus folgt, dass:

$$\overline{W}_1 = \frac{1}{4\pi c^2}\int\int \overline{W}_A\, d\sigma_A = \frac{1}{4\pi c^2}\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_C \int\int \overline{w}_A\, d\sigma_A = \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_C \overline{w}_1. \qquad (17'')$$

Wir sehen somit, dass W_1, W und w_1, w von einander nach demselben Gesetz, wie die Geschwindigkeiten der Strömungen der inkompressiblen Flüssigkeiten abhängen.

Für die Berechnung der Geschwindigkeit w ist es zweckmässig ihre radial und tangential zur Kreisenlinie $|\zeta| = \text{const}$ gerichteten Komponenten:

$$\left.\begin{aligned} w_\rho &= \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial\rho} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho} \\ w_\vartheta &= \frac{\partial\varphi}{\rho\partial\vartheta} = \frac{\partial\varphi_0}{\rho\partial\vartheta} + \frac{\partial\varphi_1}{\rho\partial\vartheta} \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

zu betrachten.

Es ist klar, dass alles hier darauf ankommt die partiellen Ableitungen $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}$ und $\frac{\partial\varphi_1}{\rho\partial\vartheta}$ zu berechnen. Diese Ableitungen lassen sich aber nach (14) und (14′) so darstellen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho} &= \frac{1}{4\pi c^2}\int\int \frac{1}{H}\frac{\partial\varphi_A}{\partial\rho} ds_A \\ \frac{\partial\varphi_1}{\rho\partial\vartheta} &= \frac{1}{4\pi c^2}\int\int \frac{1}{H}\frac{\partial\varphi_A}{\rho\partial\vartheta} ds_A, \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

wo die Integrale für die Fläche des Kreises $|\zeta| = 1$ genommen sind.

[1] Diese Geschwindigkeiten entsprechen in der ζ-Ebene einer physikalisch unmöglichen Strömung, aber das schadet unseren Beweisen nicht.

Anderseits, da $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$ und $\zeta_A = re^{i\theta}$, so ergibt (19) mit Rücksicht auf (8):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_A}{\partial \rho} &= N\left\{\frac{\rho - r\cos(\vartheta - \theta)}{\rho^2 - 2r\rho\cos(\vartheta - \theta) + r^2} + \frac{\rho - r'\cos(\vartheta - \theta)}{\rho^2 - 2r'\rho\cos(\vartheta - \theta) + r'^2} - \frac{1}{\rho}\right\} \\ \frac{\partial \varphi_A}{\rho\partial\vartheta} &= N\left\{\frac{r\sin(\vartheta - \theta)}{\rho^2 - 2r\rho\cos(\vartheta - \theta) + r^2} + \frac{r'\sin(\vartheta - \theta)}{\rho^2 - 2r'\rho\cos(\vartheta - \theta) + r'^2}\right\} - \frac{j}{\rho}, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

wo:

$$r' = \frac{1}{r}. \tag{20'}$$

Folglich haben wir endlich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} &= \frac{1}{4\pi c^2}\left\{\int\int \frac{N}{H}\frac{\rho - r\cos(\vartheta - \theta)}{\rho^2 - 2r\rho\cos(\vartheta - \theta) + r^2} r\,d\theta\,dr + \right. \\ &+ \int\int \frac{N}{H}\frac{\rho - r'\cos(\vartheta - \theta)}{\rho^2 - 2r'\rho\cos(\vartheta - \theta) + r'^2} r\,d\theta\,dr - \left.\int\int \frac{1}{\rho}\frac{N}{H} r\,d\theta\,dr\right\} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\rho\partial\vartheta} &= \frac{1}{4\pi c^2}\left\{\int\int \frac{N}{H}\frac{r\sin(\vartheta - \theta)}{\rho^2 - 2r\rho\cos(\vartheta - \theta) + r^2} r\,d\theta\,dr + \right. \\ &+ \int\int \frac{N}{H}\frac{r'\sin(\vartheta - \theta)}{\rho^2 - 2r'\rho\cos(\vartheta - \theta) + r'^2} r\,d\theta\,dr - \\ &- 2\left.\int\int \frac{N}{H}\frac{r\sin\theta}{\rho(r^2 - 2r\cos\theta + 1)} r\,d\theta\,dr\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Jetzt haben wir es nur noch nötig $\frac{N}{H}$ als eine Funktion von r und θ zu berechnen. Zum diesen Zweck haben wir mit Benutzung der Formel (2):

$$N = \left\{\frac{\partial V_0^2}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + \frac{\partial V_0^2}{\partial \eta}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta}\right\} H. \tag{22}$$

Da aber mit Rücksicht auf (12):

$$V_0^2 = H\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 \tag{23}$$

und $f_0 = \varphi_0 + i\psi_0$ uns (6), wenn wir da $\zeta = re^{i\theta}$ einsetzen, gibt, so erhalten wir uns aus (22):

$$\frac{N}{H} = \left|\frac{\partial f_0}{d\zeta}\right|^2 \Delta_1 + H\Delta_2, \tag{24}$$

wo die Grössen Δ_1 und Δ_2 von den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\partial H}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + \frac{\partial H}{\partial \eta}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} = \frac{\partial H}{\partial r}\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{\partial H}{r\partial\theta}\frac{\partial \varphi_0}{r\partial\theta} \\ \Delta_2 &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 + \frac{\partial \varphi_0}{r\partial\theta}\frac{\partial}{r\partial\theta}\left|\frac{df_0}{d\zeta}\right|^2 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

definiert werden.

Es sei jetzt in der Gleichung (6) $\zeta = re^{i\theta}$, $C = |C| e^{i\mu}$ und $|C| = 1$. Zu bemerken ist dabei nur, dass die letzte Gleichung keine Beschränkungen für die Aufgabe schafft. Die Gleichung (6) gibt uns unter allen diesen Voraussetzungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_0}{\partial r} &= \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\cos(\theta - \mu) \\ \frac{\partial\varphi_0}{r\partial\theta} &= -\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\sin(\theta - \mu) + \frac{j}{r} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{\partial f_0}{\partial\zeta}\right|^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_0}{r\partial\theta}\right)^2 = 1 + \frac{j^2}{r^2} + \frac{1}{r^4} - \\ &- \frac{2\cos(\theta - \mu)}{r^2} - 2\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\frac{j\sin(\theta - \mu)}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Unter Benutzung dieser Gleichung erhalten wir aus (25):

$$\left.\begin{aligned} \Delta_2 = \frac{4\cos(\theta-\mu)}{r^7}\{&-4r^4\sin^2(\theta-\mu) + (r^2-1)^2 + \\ &+ j\sin(\theta-\mu)(r^5 + 4r^3 - r) - j^2 r^4\}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Zur Bestimmung Δ_1 setzen wir:

$$H = e^h \tag{29}$$

und dann gibt (25):

$$\Delta_1 = Hd_1, \tag{30}$$

wo

$$d_1 = \frac{\partial h}{\partial r}\frac{\partial\varphi_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial h}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta}, \tag{31}$$

und wegen (12):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r} &= \frac{4}{r}\frac{\partial r}{\partial r} + \frac{2}{P(3)}\frac{\partial P(3)}{\partial r} - \frac{1}{P(1)}\frac{\partial P(1)}{\partial r} - \frac{1}{P(2)}\frac{\partial P(2)}{\partial r} \\ \frac{\partial h}{\partial\theta} &= \frac{4}{r}\frac{\partial r}{\partial\theta} + \frac{2}{P(3)}\frac{\partial P(3)}{\partial\theta} - \frac{1}{P(1)}\frac{\partial P(1)}{\partial\theta} - \frac{1}{P(2)}\frac{\partial P(2)}{\partial\theta}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Das ermöglicht uns zu schreiben:

$$d_1 = d_1' + d_1'' + d_1''' + d_1'''', \tag{33}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} d_1' &= \frac{4}{r^3}(r^2 - 1)\cos(\theta - \mu) \\ d_1'' &= 4\frac{Q(3)}{r^2 P(3)} \\ d_1''' &= -2\frac{Q(1)}{r^2 P(1)} \\ d_1'''' &= -2\frac{Q(2)}{r^2 P(2)} \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

und $Q(1)$, $Q(2)$, $Q(3)$ sich aus der Gleichung

$$\left.\begin{array}{r} Q(n) = r(r^2 - 1)\cos(\theta - \mu) + jrr_n \sin(\theta - \theta_n) - r^2 r_n \cos(\mu - \theta_n) + \\ + r_n \cos(2\theta - \theta_n - \mu) \end{array}\right\} (35)$$

bestimmen lassen, wenn wir darin $n = 1, 2, 3$ setzen und (13′) benützen.

Somit haben wir alle in Frage stehenden Grössen als Funktionen der folgenden Variablen und Parometern dargestellt:

1) der Koordinaten des Punktes A: r, θ;

2) der Konstanten r_1, θ_1; r_2, θ_2 und r_3, θ_3, welche mit der Form des Flügels mittels Formeln (13′) und (5) verbunden sind;

3) der Konstante C, die wegen (7) vom Winkel abhängt, unter welchem die Strömungsgeschwindigkeit im $z = \infty$ gerichtet ist.

Es bleibt uns also nur noch übrig die so erhaltenen Beziehungen in die Formeln (20) einzusetzen, um zu den früher hervorgehobenen Sätzen zu kommen.

Zum Schluss verspricht der Vortragende eine Fortsetzung der Untersuchung, wo er, erstens, die Frage der Luftkräfte zu betrachten und, zweitens, die Aufgabe zahlenmässig zu verfolgen beabsichtigt.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

О ДВИЖЕНИИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. ФОКА

(*Представлено академиком* **А. Н. Крыловым**)

1. Появившаяся под этим заглавием в № 5 ИМЕН за 1933 г. статья акад. Д. А. Граве содержит критику сочинения нашего крупного ученого, покойного профессора А. А. Фридмана «Опыт гидродинамики сжимаемой жидкости». В статье Д. А. Граве говорится: «к сожалению, в этом сочинении вкрались ошибки, которые требуют серьезной переработки теории автора. Одна из главных ошибок относится к вопросу о сохранении векториальных линий». Далее Д. А. Граве делает попытку доказать, что выведенное А. А. Фридманом необходимое и достаточное условие сохраняемости векториальных линий неверно и должно быть заменено другим.

Как один из учеников покойного А. А. Фридмана, я считаю долгом выступить в защиту его памяти и показать, что нападки на его сочинение являются ошибочными и что выведенное им условие сохраняемости вполне верно. Мое выступление оправдывается, в данном случае, тем, что речь идет об имеющем в диссертации Фридмана существенное значение вопросе, допущенная же Д. А. Граве ошибка является несомненной и приводит к следствиям, противоречащим уже давно установленным выводам гидродинамики.

2. Векториальные линии вектора $\mathfrak{A}$ с составляющими A_x, A_y, A_z определяются, как известно, из дифференциальных уравнений[1]

$$\frac{dx}{A_x}=\frac{dy}{A_y}=\frac{dz}{A_z}. \qquad (1)$$

Обозначим через $\mathfrak{q}$ вектор скорости с составляющими u, v, w и введем, следуя Фридману, «оператор Гельмгольца» Helm, определяемый посредством векториального равенства

$$\operatorname{Helm}\mathfrak{A}=\frac{d\mathfrak{A}}{dt}-A_x\frac{\partial\mathfrak{q}}{\partial x}-A_y\frac{\partial\mathfrak{q}}{\partial y}-A_z\frac{\partial\mathfrak{q}}{\partial z}. \qquad (2)$$

[1] Граве приравнивает отношения (1) величине dt; если разуметь под dt дифференциал времени, то это допустимо лишь для того случая, когда движение жидкости стационарно и $\mathfrak{A}$ есть вектор скорости.

Здесь, как и в дальнейшем, символом $\frac{d}{dt}$ обозначена так называемая «субстанциальная» производная по времени

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{3}$$

Фридман, в указанном своем сочинении, дает совершенно строгий, хотя, быть может, и излишне подробный, вывод условия сохраняемости векториальных линий вектора $\mathfrak{A}$. Условие Фридмана имеет вид

$$\mathfrak{A} \times \operatorname{Helm} \mathfrak{A} = 0, \tag{4}$$

где косой крест $\times$ есть знак векториального произведения.

Граве, вследствие допущенной им ошибки, приходит к условию

$$\operatorname{Helm} \mathfrak{A} = 0. \tag{5}$$

Прежде чем приступить к выяснению того, в чем именно состоит ошибка Граве, заметим, что условие сохраняемости должно быть таково, что если ему удовлетворяет вектор $\mathfrak{A}$, то ему должен удовлетворять и всякий параллельный ему вектор $k\mathfrak{A}$, где скаляр k есть произвольная функция от координат и времени. Это требование, очевидное геометрически, вытекает также и из инвариантности дифференциальных уравнений (1) по отношению к замене $\mathfrak{A}$ на $k\mathfrak{A}$. Так как мы имеем

$$\operatorname{Helm} k\mathfrak{A} = \frac{dk}{dt}\mathfrak{A} + k \operatorname{Helm} \mathfrak{A} \tag{6}$$

то указанному требованию удовлетворяет условие Фридмана (4), но не удовлетворяет условие Граве (5).

3. Обратимся теперь к рассуждениям Граве,[1] причем начало их приведем дословно (см. фиг. 1). «Пусть элемент AB линии L вектора, рассматриваемый как вектор, равен $\varepsilon\mathfrak{A}$, где ε бесконечно малая положительная величина. Пусть при движении жидкости течет также и линия L. Через бесконечно малый промежуток времени τ точки A и B перейдут в точки C и D, которые будут концами векторов $AC = \tau\mathfrak{q}$ и $BD = \tau\mathfrak{q}_1$. Для того, чтобы линия сохранялась, необходимо, чтобы вектор CD равнялся изменению за время τ вектора $\varepsilon\mathfrak{A}$». До сих пор все верно; дальше же Граве делает ошибку. Ошибка Граве состоит в том, что он рассматривает величину ε, как постоянную, тогда как на самом деле она может

[1] Геометрическое построение, которым пользуется Граве, приведено также в книге Prandtl-Tietjens, Hydro- und Aeromechanik, Berlin, 1929—1931, т. 1, стр. 185.

быть функцией координат и времени. Если продолжить рассуждения Граве, приняв во внимание изменение ε, то получится

$$AB = \varepsilon\mathfrak{A}; \quad AC = \tau\mathfrak{q};$$
$$BD = \tau\mathfrak{q} + \tau\left(\frac{\partial\mathfrak{q}}{\partial x}\varepsilon A_x + \frac{\partial\mathfrak{q}}{\partial y}\varepsilon A_y + \frac{\partial\mathfrak{q}}{\partial z}\varepsilon A_z\right);$$
$$CD = \varepsilon\mathfrak{A} + \tau\left(\varepsilon\frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \frac{d\varepsilon}{dt}\mathfrak{A}\right),$$

и векториальное равенство

$$AB + BD = AC + BD$$

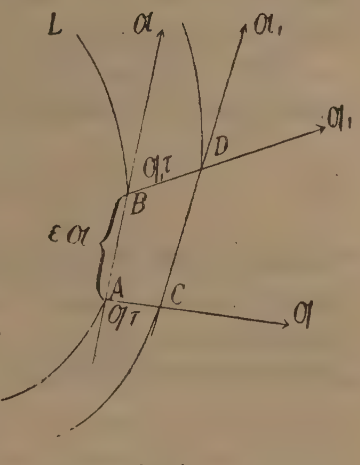
дает

$$\varepsilon\,\mathrm{Helm}\,\mathfrak{A} + \frac{d\varepsilon}{dt}\mathfrak{A} = 0.$$

Исключая отсюда ε путем векториального умножения левой части равенства на $\mathfrak{A}$, получаем условие Фридмана

(4) $$\mathfrak{A} \times \mathrm{Helm}\,\mathfrak{A} = 0,$$

тогда как Граве приходит к неверному условию (5) вследствие того, что он не учитывает члена с $\frac{d\varepsilon}{dt}$.



Фиг. 1

4. Заметим, что из условия Фридмана (4) вытекает

(4*) $$\mathrm{Helm}\,\mathfrak{A} = \lambda\mathfrak{A},$$

где λ есть скалярная функция от координат. Подставляя (4*) в (6), получим

$$\mathrm{Helm}\,k\mathfrak{A} = \left(\frac{dk}{dt} + k\lambda\right)\mathfrak{A},$$

и если мы подберем функцию k так, чтобы было

(7) $$\frac{dk}{dt} + k\lambda = 0,$$

то мы будем иметь

(8) $$\mathrm{Helm}\,k\mathfrak{A} = 0.$$

Таким образом, от вектора, удовлетворяющего условию Фридмана, всегда можно перейти, путем умножения на соответствующий множитель k, к такому вектору, для которого оператор Гельмгольца равен нулю.

5. Дифференциальные уравнения сохраняющихся векториальных линий удобно писать в виде

$$\frac{dx}{ds} = kA_x; \quad \frac{dy}{ds} = kA_y; \quad \frac{dz}{ds} = kA_z, \tag{9}$$

т. е. выбирать независимую переменную (параметр s) так, чтобы в правые части уравнений входил вектор $\mathfrak{A}$, нормированный, согласно (8), посредством множителя k. Этим выбором достигается симметрия некоторых уравнений относительно времени t и параметра s.

Пусть $f = f(x, y, z, t; s)$ есть функция от координат, времени и от параметра s. Обозначим через $\frac{df}{ds}$ выражение

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial s} + k\left(A_x \frac{\partial f}{\partial x} + A_y \frac{\partial f}{\partial y} + A_z \frac{\partial f}{\partial z}\right). \tag{10}$$

Величину $\frac{df}{ds} ds$ можно рассматривать, как изменение функции f вдоль векториальной линии вектора $\mathfrak{A}$, вдоль которой изменения x, y, z и s связаны соотношениями (9); время t считается при этом постоянным. Функция, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{df}{ds} = 0, \tag{11}$$

остается вдоль векториальной линии постоянной. Уравнения векториальной линии в конечном виде получатся, если приравнять постоянным три независимых интеграла уравнения (11).

Нетрудно проверить тождество

$$\frac{d}{ds}\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{df}{ds} - \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{Helm} k\mathfrak{A}. \tag{12}$$

Из этого тождества вытекает следующая теорема, которая дает аналитическое выражение геометрическому свойству сохраняемости векториальных линий. Если функция f удовлетворяет уравнению $\frac{df}{ds} = 0$, то при условии $\operatorname{Helm} k\mathfrak{A} = 0$ субстанциальная производная ее также удовлетворяет этому уравнению.

Как это видно из сопоставления выражений (3) и (10), из тождества (12) вытекает также полная симметрия (точнее антисимметрия) выражения $\operatorname{Helm} k\mathfrak{A}$ относительно вектора $k\mathfrak{A}$ и параметра s, с одной стороны, и вектора скорости $\mathfrak{q}$ и времени t, с другой стороны; разница только в том, что вектора $k\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{q}$ не содержат параметра s, но могут содержать время t.

6. Обращаясь к рассмотренному Граве вопросу о сохраняемости вихревых линий, заметим, что из приведенного Граве уравнения

$$\text{Helm}\,\mathfrak{L} = -\mathfrak{L}\,\text{div}\,\mathfrak{q} \quad (\mathfrak{L} = \text{rot}\,\mathfrak{q}) \tag{13}$$

легко выводится известное соотношение

$$\text{Helm}\,\frac{\mathfrak{L}}{\rho} = 0, \tag{14}$$

где ρ есть плотность жидкости. Вывод этого соотношения может служить иллюстрацией применения общих формул (4*), (7) и (8). В самом деле, положив $\mathfrak{A} = \mathfrak{L}$ и сравнивая (4*) с (13) получаем $\lambda = -\text{div}\,\mathfrak{q}$; уравнение (7) дает тогда

$$\frac{dk}{dt} - k\,\text{div}\,\mathfrak{q} = 0$$

так что, в силу уравнения неразрывности, можно взять $k = \frac{1}{\rho}$, после чего (8) приводится к (14).

Уравнения (13) или (14) являются выражением того общеизвестного факта, что теоремы Гельмгольца справедливы также и для сжимаемой однородной жидкости. Оспаривая этот факт, Граве приходит, напротив того, к заключению, что «необходимым и достаточным условием сохранения вихревых линий является $\text{div}\,\mathfrak{q} = 0$, т. е. жидкость должна быть несжимаема». Ошибочность этого заключения очевидна.

Август 1933 г.
Физико-математический институт
Академии Наук.

V. FOCK. ÜBER DIE BEWEGUNG EINER KOMPRESSIBLEN FLÜSSIGKEIT

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird gezeigt, dass die in der gleichnamigen Arbeit von D. Grave[1] geübte Kritik der Friedmannschen Bedingung (4) für die Erhaltung der Vektorlinien des Vektors $\mathfrak{A}$ auf einem Missverständnis beruht und dass die von D. Grave vorgeschlagene Bedingung (5), sowie die daraus gezogenen Schlüsse nicht stichhaltig sind. Ferner wird gezeigt, dass man für jeden der Bedingung (4) genügenden Vektor $\mathfrak{A}$ eine skalare Grösse $k \neq 0$ finden kann, von der Beschaffenheit, dass der Vektor $k\mathfrak{A}$ die Gleichung (8) erfüllt. Dann wird die Wahl des Parameters s in den Differentialgleichungen (9) der Vektorlinien besprochen, und es wird gezeigt, dass durch diese Wahl die Symmetrie gewisser Gleichungen inbezug auf s und die Zeit t erzielt werden kann. Zum Schluss werden die obigen Betrachtungen auf die Wirbellinien angewandt.

---

[1] Bull. de l'Académie des Sciences de l'URSS, 1933, № 5, p. 653.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ХИМИЧЕСКАЯ ПРИРОДА СТЕРЛИТАМАКСКОЙ НЕФТИ

(ИССЛЕДОВАНИЕ БЕНЗИНО-КЕРОСИНОВОЙ ЧАСТИ)

Н. Д. ЗЕЛИНСКОГО и Ю. К. ЮРЬЕВА

Исследованная нами нефть представляла собой образец[1] из скважины № 703: $d_4^{20} = 0.890$, содержание серы по Кариусу $= 2.43\%$[1].

При первой отгонке отобрана часть, кипящая до 300°, из которой дальнейшей перегонкой выделен бензин т. к. 41—150° и керосин т. к. 150—300°. Последующая фракционированная перегонка производилась с хорошо разделяющим дефлегматором Vigreux, и результаты ее, с перечислением содержания фракций на нефть, а также и все константы полученных фракций, приводятся в табл. 2.

Исследование химического состава производилось описанным уже ранее методом:[2] прежде всего были удалены сернистые соединения, в сравнительно большом количестве содержащиеся в стерлитамакской нефти, затрудняющие исследование углеводородной части и отравляющие катали-

Таблица 1

Фракции	Содержание ароматики в объемных %		
	До катализа в фракции	После катализа	
		В катализате	На всю фракцию
60—95°	10.0	6.0	5.4
95—122	12.5	11.5	10.0
122—150	15.0	17.0	14.5
150—200	25.0	26.0	19.5
200—250	30.0	24.0	16.8
250—300	37.0	37.5	23.6

[1] Е. А. Смолиной выражаем благодарность за присылку образца нефти с месторождения.

[2] Изв. Акад. Наук СССР, 851 (1930); Труды Уральск. сессии Акад. Наук СССР, т. I (1932); Breffstonnchemie (1933), 14, 347.

СТЕРЛИТАМ

Скважина № 703. При п

Фракции	% содержания фракций на нефть	d^{20}_4					Анилиновая точка фракций (максимальная)				
		До катализа			После катализа		До катализа			После катализа	
		До обессер.	После обесс. и перегонки	После удаления ароматики	До удаления ароматики	После удаления ароматики	До обессер.	После обесс. и перегонки	После удаления ароматики	До удаления ароматики	После удаления аро-
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
До 60°	0.3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
60—95	1.5	0.6974	0.6945	0.6800	0.6803	0.6680	51.8°	53.5°	62.1°	61.2°	66.
95—122	1.8	0.7304	0.7255	0.7138	0.7193	0.7016	51.2	53.8	62.4	55.0	65.
122—150	3.1	0.7496	0.7476	0.7314	0.7446	0.7208	53.6	55.3	65.9	53.5	68.
150—200	9.2	0.7971	0.7874	0.7569	0.7771	0.7438	51.2	52.6	71.3	51.5	72.
200—250	10.1	0.8292	0.8221	0.7851	0.8002	0.7678	54.9	56.6	78.2	61.6	78.
250—300	8.7	0.8693	0.8560	0.8079	0.8503	0.7816	63.6	63.2	86.6	56.4	82.

затор. Удаление производилось обработкой солями ртути. Отделенные от обильного осадка комплексных ртутных соединений, промытые и высушенные над хлористым кальцием фракции перегонялись и исследовались на содержание различных классов углеводородов. Ближе сернистые соединения, как таковые, не исследовались, но несомненно, что среди них нет тиофена и его производных (отрицательная индофениновая реакция), а имеются меркаптаны и жирные сульфиды.

После удаления сернистых соединений определялось количественное содержание ароматических углеводородов в исследуемых фракциях сернокислотным методом (табл. 1) и методом критических температур растворения в анилине (табл. 2). (Анилин с темп. засгыв. — 6.4°). Удаление ароматики производилось двухкратным получасовым взбалтыванием в мерном цилиндре с двойными объемами моногидрата с последующим двухчасовым отстаиванием. Лишь для фракции 250—300° потребовалась третья обработка. Константы фракций определялись до и после обработки серной кислотой. Освобожденные от ароматики фракции подвергались дегидрогенизационному катализу методом Зелинского[1] для определения содержания углеводородов гексагидроароматического ряда, причем в настоящей работе этот

[1] Ж., **43**, 1920 (1911); **45**, 52, (1913): B. **44**, 3121, (1911); **45**, 3678 (1912); **46**, 787 (1913). Изв. Росс. Акад. Наук, 183 (1923).

Таблица 2

АЯ НЕФТЬ

ке до 300° отобрано 39.5%

n^{20}_D					% содержания серы по Энглеру	% содержания во фракциях углеводородов (весовые %)				
До катализа			После катализа							
До обессер.	После обесс. и перегонки	После удаления ароматики	До удаления ароматики	После удаления ароматики		Непредельных	Ароматических	Гексагидроароматических	Прочих цикланов	Парафиновых
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
.3936	1.3932	1.3845	1.3852	1.3801	0.390	—	9.9	5.6	12.9	71.6
.4100	1.4092	1.4002	1.4076	1.3954	0.293	—	10.3	12.2	15.8	61.7
.4206	1.4200	1.4100	1.4203	1.4051	0.241	—	13.4	17.8	14.1	54.7
.4462	1.4420	1.4236	1.4386	1.4168	0.860	—	27.4	22.9	14.2	35.5
.4630	1.4604	1.4369	1.4491	1.4289	1.159	—	33.5	18.8	17.4	30.3
.4841	1.4784	1.4485	1.4715	1.4354	1.947	—	38.8	27.0	22.6	11.6

метод распространен нами и на фракции, выкипающие до 300° при обыкновенном давлении. Как уже отмечалось в выше цитированных работах, каталитическая дегидрогенизация нефтяных фракций, кипящих выше 150°, протекает гладко, без образования непредельных углеводородов и без отравления катализатора даже и в том случае, когда температура при дегидрировании поднималась выше 310°. Катализ фракций 200—250° и 250—300° производился при более высокой температуре, соответственно 320° и 340°. Продукты катализа фракций, кипящих выше 150° не реагировали с перманганатом и бромной водой; при испытании по методу Маргошеса[1] на содержание непредельных углеводородов получался также отрицательный результат. Катализатором служил платинированный (10%) уголь. Скорость проведения фракций над катализатором 1 $см^3$ в 5 минут. Катализатор, нацело дегидрировавший гексаметилен в бензол при однакратном контакте с ним, совершенно не снизил своей активности в течение всего времени работы, даже после двух- и трехкратных проведений над ним фракций, кипящих выше 200°. После определения констант катализатов, определения и удаления вновь образовавшейся в результате катализа ароматики выше описанным методом (табл. 1), определялись константы деароматизированных катализатов. По этим константам расчитывалось содержание прочих цикла-

[1] Petroleum, 35 (1929).

нов и параффинов с перечислением на исходную фракцию. Ароматика, определенная в катализатах, перечислялась на гидроароматические соединения всей фракции. Коэффиценты для расчета ароматики и полиметиленовых углеводородов (нафтенов) в фракциях до 150° взяты из работы Тиличеева[1] — в фракциях 150—300° из работы Саханова и Вирабянца.[2] Здесь интересно отметить, что анилиновая точка деароматизированной фракции 250—300° до катализа (как это видно из столбцов 10 и 12 табл. 2) выше, чем у деароматизированного катализата. Повидимому, это надо объяснить влиянием пятичленных циклов, которое проявилось после удаления катализом гексагидроароматических углеводородов; особенно отчетливо в этой фракции, содержащей мало параффиновых углеводородов.

Все результаты работы сведены в таблицу 2 (см. стр. 136—137).

Анализ деароматизированного катализата фракции 150—200°: 0.0889 г вещества дали 0.2775 г CO_2 и 0.1201 г H_2O; найдено: C = 85. 13% H = 15. 11%

Из анализа следует, что остаток данной фракции представляет собой смесь полиметиленовых и метановых углеводородов с преобладанием содержания последних. К такому же выводу приводит и определение по анилиновой точке.

В заключение мы исследовали оптическую деятельность масляных фракций стерлитамакской нефти. Остаток нефти после отгона бензина и керосина фракционировался в вакууме, и в отдельных фракциях определялась их активность. Результаты приводятся в табл. 3.

Таблица 3

Темп. кипения в вакуме	Давление в мм	Темп. кип. при норм. давлении	L	α	d_4^{20}	$[\alpha]_D$	Градусы Ventzke
131—166°	5 мм	300—350°	100 мм	0	0.8494	—	—
166—201	„	350—400	„	+0.25	0.8726	0.29°	0.83°
201—236	„	400—450	„	+0.29	0.8953	0.32	0.94

ВЫВОДЫ

1. Стерлитамакский бензин отличается от Пермского бензина (Чусовские городки) меньшим содержанием ароматических углеводородов.

[1] ГРОЗНИИ. Химический состав нефтей и нефтяных продуктов, под ред. проф. Саханова, стр. 77 и 95 (1931).

[2] Там же, стр. 125 и 131.

2. Стерлитамакский керосин содержит все же значительный процент ароматических углеводородов и сернистых соединений и потому непригоден для освещения без предварительного удаления серы и ароматики.

3. Наблюдающееся различие в химическом составе бензинных фракций стерлитамакской и пермской нефтей сглаживается по мере повышения температуры кипения, и в масляных фракциях можно ожидать значительного сходства в их химическом составе; к тому же и стерлитамакская и пермская нефти характеризуются высоким содержанием сернистых соединений, парафина и смолистых веществ.[1]

4. В распределении классов углеводородов по фракциям наблюдается уменьшение содержания парафиновых и возрастание содержания полиметиленовых и ароматических углеводородов по мере повышения температуры кипения, что свойственно многим нефтям. Здесь же необходимо отметить, что в катализатах фракции 150—200° и 200—250° нафталина и его производных обнаружено не было. Отсюда следует, что в этих фракциях отсутствуют декагидронафталиновые углеводороды.

5. Стерлитамакская нефть должна быть отнесена к сернистым нефтям, содержащим парафиновые, полиметиленовые и ароматические углеводороды.

Лаборатория орган. химии
Московск. гос. университета.

N. ZELINSKIJ and G. JURJEV. THE CHEMICAL PROPERTIES OF THE STERLITAMAK PETROLEUM

SUMMARY

The Sterlitamak petroleum has been analysed for the purpose of determining its content of aromatic, hexahydroaromatic, and other naphthene as well as paraffin hydrocarbons by the aniline method along with the method of dehydrogenizing catalysis.

The determination of hexahydroaromatic hydrocarbons by the method of dehydrogenizing catalysis has been carried out successfully in the case of fractions whose boiling point is from 200 to 300°, which proves the applicability of this method for the study of petroleum hydrocarbons with a high boiling point.

The sulphur content of each fraction as well as of the petroleum itself has been determined.

[1] Нефтяное хозяйство, **10**, 231 (1932).

In oily fractions the optical activity has been determined.

Fraction	α	$(\alpha)_D$	Wentzke's degrees
300—350	0	0	0
350—400	+ 0.25	0.29°	0.33°
400—450	+ 0.29	0.32	0.94°

The distribution of hydrocarbons into classes in the fractions of the Sterlitamak petroleum is shown by the following table:

Fraction	Hydrocarbons contained in the fractions (% by weight)				Sulphur content (%)
	Aromatic Hydrocarbons	Hexahydro-aromatic hydrocarbons	Other naphthene hydrocarbons	Paraffin hydrocarbons	
60—95°	9.9	5.6	12.9	71.6	0.39
95—122°	10.3	12.2	15.8	61.7	0.29
122—150°	13.4	17.8	14.1	54.7	0.24
150—200°	27.4	22.9	14.2	35.5	0.86
200—250°	33.5	18.8	17.4	30.3	1.16
250—300°	38.8	27.0	22.6	11.6	1.95

The results obtained have lead the authors to the following conclusions:

1. The Sterlitamak benzine differs from that of Ural (Perm) by a smaller content of aromatic hydrocarbons.

2. The Sterlitamak kerosene contains a considerable percentage of aromatic hydrocarbons and sulphur compounds.

3. The difference in composition existing between the benzine fractions of the Sterlitamak petroleum and those of the petroleum of Perm somewhat diminishes as the boiling point becomes higher, and in oily fractions a strong resemblance of their chemical compositions is to be expected; moreover, both these petroleums are characterized by a considerable content of sulphur compounds, paraffin hydrocarbons, and resinous substances.

4. The Sterlitamak petroleum must be referred to the sulphureous petroleums (the sulphur content according to Carius is 2.43%) of a mixed type with a prevalence in its lower fractions of the hydrocarbons of the paraffin series.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

СИНТЕЗ ХЛОРОПРЕНОВОГО КАУЧУКА ИЗ АЦЕТИЛЕНА

Н. Д. ЗЕЛИНСКОГО, Н. С. КОЗЛОВА и Р. С. ШТЕРА

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Ацетилен представляет вещество чрезвычайно интересное как в теоретическом, так и в практическом отношениях. Химическая природа ацетилена определяется его сильно выраженным эндотермическим характером и максимальной непредельностью системы, состоящей из двух атомов углерода и двух атомов водорода. Эта непредельность выражается тройной связью или четырьмя свободными валентностями: $CH \equiv CH$ и $\underset{\parallel}{CH} - \underset{\parallel}{CH}$.

Несмотря на большое количество работ, посвященных ацетилену, механизм реакций, к которым способен этот углеводород и по настоящее время остается далеко еще невыясненным. Природа и сущность тройной связи углеродных атомов в молекуле ацетиленовых углеводородов вообще и в молекуле ацетилена в частности не получила, пока, достаточно ясного теоретического освещения.

Обычное представление о тройной связи в современной органической химии не идет дальше узко-эмпирических толкований чисто описательного характера, почему и свойства ацетиленовых соединений больше описываются, чем объясняются.

Теоретический интерес к изучению молекулярного состояния ацетилена и его динамики стимулируется также и теми взглядами на его строение, которые пока еще не нашли достаточного экспериментального подтверждения. Наиболее важные среди них вытекают из работ Нэффа и Ингольд-Уншервуд, которые независимо один от другого пришли почти к совершенно одинаковым выводам.

Нефф в 1897 г. на основании чрезвычайной ядовитости галоидо-замещенных ацетилена предположил, что последние имеют строение такого вида:

$$C_2Br_2 \rightarrow CBr_2 = C =$$

причем, такому строению галоидо-ацетилена по Неффу соответствует и строение самого ацетилена.

Предположение о том, что ацетилен существует в двух формах, в виде нормальной молекулы $CH \equiv CH$, в которой оба углеродных атома равноценны и четырехвалентны и в форме изоацетилена, имеющего строение $CH_2 = C =$, в которой углеродные атомы не являются равноценными, один из них четырехвалентный, а другой двухвалентный, было высказано также и Ингольд-Уншервуд, которая, изучая теплоёмкости ацетилена при разных температурах, пришла к выводу, что обычный ацетилен представляет равновесную систему молекул нормального ацетилена с молекулами изоацетилена:

$$CH \equiv CH \rightleftarrows CH_2 = C$$

причем при обыкновенной температуре изоацетилена имеется около 1%, а с повышением температуры количество последнего увеличивается. Ингольд-Уншервуд допускает взаимный переход одной формы ацетилена в другую.

Такое представление о строении ацетилена, имеет исключительно важное значение, ибо для понимания химизма реакций не безразлично знать, какие именно молекулы ацетилена принимают участие в данной реакции.

В силу своей ненасыщенности ацетилен, как известно, способен не только к реакциям присоединения; при высокой температуре (600—650°) он полимеризуется в бензол, который, вступая в конденсацию с новыми молекулами ацетилена, дает весьма ценные для науки и химической промышленности продукты: толуол, стирол, нафталин, антрацен и др. конденсированные ароматические углеводороды.

Вопрос о термической полимеризации ацетилена имеет чрезвычайно интересную историю, которая дает возможность правильно понять и оценить новейшие работы в этой области.

Впервые Бертело,[1] нагревая ацетилен над ртутью в запаянной стеклянной трубке, получал небольшое количество продуктов уплотнения и показал, что в них содержится бензол и целый ряд других ароматических углеводородов. Классический опыт Бертело положил начало дальнейшим работам в области полимеризации ацетилена (Муассан, Мурё, Сабатье и др.). Ацетилен подвергали термической полимеризации, гидрогенизации и уплотнению в присутствии катализаторов.

Весьма подробными и интересными, в смысле проведения их в полузаводском масштабе, исследованиями в области термической полимеризации

[1] Berthelot. Ann. chim. phys., (3), **53**, 188, 1858 г.; (4), **9**, 455, 1866 г.; **12**, 53. 1867 г.

ацетилена являются работы Мейера и его сотрудников, которые проводились в течение почти 20 лет.[1] Мейеру удалось из продуктов полимеризации ацетилена, полученных в значительном количестве, выделить более 30 индивидуальных соединений и всецело подтвердить экспериментальное искусство Бертело, который, имея в руках всего несколько кубических сантиметров продуктов конденсации, доказал присутствие в них разнообразных представителей ароматики. Некоторое значение имеют и работы одного из нас.

Н. Д. Зелинскому[2] удалось впервые показать, насколько легко, не сопровождаясь взрывами, как это часто бывало в опытах Мейера, происходит уплотнение ацетилена в бензол и прочие ароматические углеводороды в присутствии такого контакта как активированный древесный уголь.

Характерной особенностью всех работ по термической полимеризации ацетилена является то, что первой стадии реакции, когда реагируют между собой только две молекулы ацетилена, не удавалось уловить, а простейшим продуктом такой полимеризации всегда является циклический тример ацетилена, т. е. бензол C_6H_6.

И только лишь Mignocan в 1929 г., подвергая ацетилен воздействию электрических разрядов, получил димер и тример ацетилена, которые являлись соединениями с открытой цепью углеродных атомов.

Несмотря на то, что термическая и контактная полимеризация ацетилена тщательно изучалась, все же она не находила промышленного и технического использования.

Среди исследований по контактной полимеризации ацетилена особо выдающейся нужно признать работу американских химиков, опубликованную в 1931 г.[3] Такое крупное значение этой работе приходится уделить потому, что названные авторы, с одной стороны, нашли совершенно новый способ контактной полимеризации ацетилена, а с другой, их продукты полимеризации имели совершенно иное строение и свойства: это не были ароматические углеводороды.

Такие результаты своеобразно протекающей полимеризации ацетилена имеют исключительно большое теоретическое значение, ибо характер полученных продуктов совершенно по иному ставит вопрос о механизме, в известных условиях, реакции полимеризации. Продукты, полученные при этом,

[1] Ber. **45**, 1609, 1902 г.; **46**, 3183, 1913 г.; **47**, 2765, 1914 г.; **50**, 422, 1917 г.; **51**, 1571, 1918 г.; **53**, 1261, 1920 г.

[2] ЖРФХО **55**, 140, 1924 г.

[3] J. A. Nieuwland, W. S. Calcott, Ira Williams, Arnold Cöllins and James E. Herby и др. Journ. Am. chem. Soc., ноябрь 1931 г.

несомненно найдут большое практическое применение в целом ряде отраслей промышленности в особенности каучуковой как за границей, так и в СССР.

Если все предыдущие опыты по полемиризации ацетилена вели к продуктам циклического строения, то при том способе полимеризации, который разработан американскими химиками, получаются исключительно такие соединения, которые имеют открытую цепь углеродных атомов. Главными продуктами полимеризации ацетилена здесь являются винил-ацетилен (димер); дивинил-ацетилен C_6H_6 (тример, который изомерен бензолу) и тетрамер ацетилена (C_8H_8).

Американцы впервые описали и свойства открытого ими нового вида синтетического каучука-хлоропрена, который получается путем присоединения одной молекулы хлористого водорода к винил-ацетилену. Хлоропреновый каучук обладает чрезвычайно важными свойствами; без прибавления к нему серы он подобен хорошо вулканизованному природному каучуку, причем положительные качества природного каучука в нем выражены гораздо сильнее. Обладая большей плотностью, он меньше поглощает воды, т. е. почти водонепроницаем, с большим трудом набухает в углеводородах и чрезвычайно стоек к таким сильным химическим реагентам как кислород, озон, кислоты и щелочи. Хлоропреновый каучук в присутствии небольших количеств натриевой соли олеиновой кислоты дает водные эмульсии, образуя, таким образом, синтетический лятекс, диаметр частичек хлоропрена в котором меньше диаметра частичек природного лятекса в 5—7 раз. Благодаря этому хлоропреновый лятекс очень легко пропитывает различные материалы, чего иногда нельзя бывает достигнуть, пользуясь естественным лятексом.

Для Советского Союза проблема производства каучука имеет исключительно большое хозяйственное и политическое значение. Эта задача решается в настоящее время двумя путями: культурой растительного каучука из Тау-Сагыза и синтезом каучука из спирта (способ С. В. Лебедева). Работы же американских авторов дают новый метод получения синтетического каучука из ацетилена. Если принять во внимание, что ацетилен получается из карбида кальция, который является очень дешевым полупродуктом химической промышленности, то становится совершенно ясным, что производство хлоропренового каучука в Советском Союзе представляет собой проблему, которая должна быть решена в самое ближайшее время. Получение синтетического каучука из ацетилена может иметь большое преимущество перед производством его из спирта.

Американцы в своих работах, подробно описывая получение и свойство хлоропренового каучука, упорно, в силу особых соображений всемирно известной фирмы Дюпон, по заданию которой они работают, в течение почти двух лет замалчивали и скрывали способ получения из ацетилена винилацетилена, который является основным исходным веществом для синтеза хлоропренового каучука. Они не только не давали указаний на то, как получать винил-ацетилен, исходя из ацетилена, но советовали тем, кто хотел бы работать с винил-ацетиленом, получать его, исходя из бутадиена по чрезвычайно сложному и не имеющему никакой технической ценности методу Вильштетера и Бильтца.[1]

Они описывали подробно только лишь получение дивинил-ацетилена и тетрамера ацетилена, которые могут найти применение в лакокрасочной промышленности.

Наша работа имела целью найти условия, скрытые американскими химиками, как получить винил-ацетилен, этот важный полупродукт для синтеза хлоропренового каучука. Одновременно мы ставили перед собой задачу и изучения теоретической стороны вопроса о полимеризации ацетилена под влиянием солей закиси меди.

Сама по себе медь как таковая способствует, как известно, глубокому уплотнению ацетилена: образование купрена контактом ацетилена с медью при повышенной температуре. Химическая природа меди и ее солей закисного типа теснейшим образом связана со всеми превращениями ацетилена.

В данном исследовании мы, как и американские ученые, руководствовались следующими соображениями: давно уже было известно, что при пропускании ацетилена через раствор полухлористой меди, ацетилен поглощается и образует с нею комплексное соединение, состав которого в силу его неустойчивости остается пока окончательно не выясненным. Уже давно было замечено, что при пропускании ацетилена через раствор полухлористой меди, ацетилен изменяет свой запах, очевидно, в силу примеси к нему какого-то нового вещества, которое могло образоваться из ацетилена под влиянием полухлористой меди. Выделить и обнаружить это вещество не удавалось. Так как полухлористая медь плохо растворима в воде, то можно было думать, что с повышением концентрации полухлористой меди, в связи с введением в раствор новых одноименных ионов (NH_4Cl, HCl, $NaCl$ и т. д.) получатся более благоприятные условия для контакта ацетилена с полухлористой медью и удастся обнаружить образующиеся при этом вещества.

[1] Ber., 46, 536.

Так как полухлористая медь в растворе быстро окисляется, то для того, чтобы приостановить процесс окисления, прибавляется к раствору порошок металлической меди. Исходя из этих соображений, мы пользовались пересыщенным раствором полухлористой меди в концентрированном водном растворе хлористого аммония в присутствии меди.

Мы убедились, что полухлористая медь действительно образует с ацетиленом и продуктами его полимеризации комплексные соединения.

В этом комплексе молекула нормального ацетилена превращается в изоацетилен, и в этом же комплексе, повидимому происходит взаимодействие молекул изоацетилена с нормальным ацетиленом. При взаимодействии одной молекулы нормального ацетилена с одной молекулой изоацетилена и образуются винил-ацетилен. При взаимодействии же двух молекул изоацетилена с одной молекулой ацетилена образуется дивинил-ацетилен, а затем и более высокие полимеры ацетилена. Образование того или иного продукта полимеризации зависит от продолжительности хранения образовавшегося комплекса. Это легло в основу одного из наших способов получения винил-ацетилена, названного нами методом «созревания».

Сравнительная медлительность, с которой идет превращение нормальной молекулы ацетилена в изоацетилен под влиянием солей закиси меди, может быть ускорена незначительным повышением температуры, что легло в основание второго метода полимеризации ацетилена, названного нами методом горячей полемеризации. Таким образом мы в известной степени экспериментально подтверждаем представление Нэффа и Ингольд-Уншервуд о существовании ацетилена в двух формах, равновесное состояние которых подвижно и обусловливается температурой.

Винил-ацетилен представляет собой вещество очень интересное и в теоретическом отношении. Среди углеродистых соединений еще не изучены вещества, молекулы которых содержат одну простую, одну двойную и одну тройную связь между углеродными атомами. Благодаря своей ненасыщенности и чрезвычайной реакционной подвижности винил-ацетилен является и технически весьма ценным продуктом. Винил-ацетилен в присутствии солей закиси меди, которые своеобразно активируют тройную связь его, присоединяет по этой связи одну молекулу хлористого водорода, и мы получаем хлор 2-бутадиен 1,3. Это есть как бы изопрен, в котором метильная группа замещена на атом хлора, почему и произошло название хлоропрен.

То, что описывается нами в данной статье, представляет результаты работы в лаборатории органической химии Московского университета.

В настоящее время мы можем считать, что проблема получения хлоропренового каучука в главных основах своих уже разработана в СССР и ждет промышленного разрешения. Следует указать, что целый ряд производных винил-ацетилена и сам хлоропрен могут иметь и оборонное значение.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Получение винил-ацетилена по методу «созревания»

В двухлитровую стеклянную колбу, в которую загружено 1000 г полухлористой меди, 400 г хлористого аммония, 100 г порошкообразной меди, 30 г соляной кислоты (уд. в. 119) и 425 см³ воды, пропускается ацетилен. В момент поглощения ацетилена полухлористой медью происходит нагревание смеси до 45—50°. Скорость поглощения ацетилена заметно усиливается, если смесь, находящуюся в колбе, подвергать сильному встряхиванию.

Обычно насыщение смеси ацетиленом заканчивается через 2 $^1/_2$—3 часа, и общая масса взятых ингредиентов увеличивает свой вес на 40—50 г. Образующийся в колбе комплекс полухлористой меди с ацетиленом окрашен в светложелтый цвет.

Спустя некоторое время, после спокойного хранения при комнатной температуре, прореагировавшая смесь продуктов подвергается нагреванию на масляной бане, температура которой должна быть не выше 140°. Отгонка продукта реакции оканчивается, когда начинает перегоняться чистая вода. В двух приемниках, — первый охлаждается льдом, второй твердой углекислотой, — собирается слегка желтоватая жидкость. Полученный продукт подвергают разгонке на колонке Девиса. Он начинает кипеть от +5°. Из него нам удалось выделить фракцию, кипящую в пределах от +5° до +7°, которая оказалась винил-ацетиленом. При разгонке 150 г более высоко кипящей части конденсата получили следующие результаты:

Фракция	Граммы	Рефракция
22—40°	15	1.4090
40—50°	15	1.4084
50—60°	8	1.4060
60—70°	14	1.4216
70—80°	15	1.4662
80—84°	22	1.4935

Остаток — 40 г.

Все эти фракции представляют сложную смесь непредельных углеводородов.

Из фракции 80—84° был получен чистый дивинил-ацетилен с точкой кипения 47—48° при 200 мм; $n_D^{21°} = 1.5045$. Из остатка выделили тетрамер ацетилена C_8H_8 с точкой кипения 75—76° при 20 мм; с $n_D^{21°} = 1.5715$, константы которых совпадают с данными американских химиков. Очевидно, помимо винил-ацетилена, дивинил-ацетилена, и тетрамера ацетилена образуются, какие-то еще новые продукты полимеризации, что указывает на то, что схема полимеризации ацетилена не может укладываться только в те представления, которые даны выше. На самом деле процесс полимеризации является более сложным.

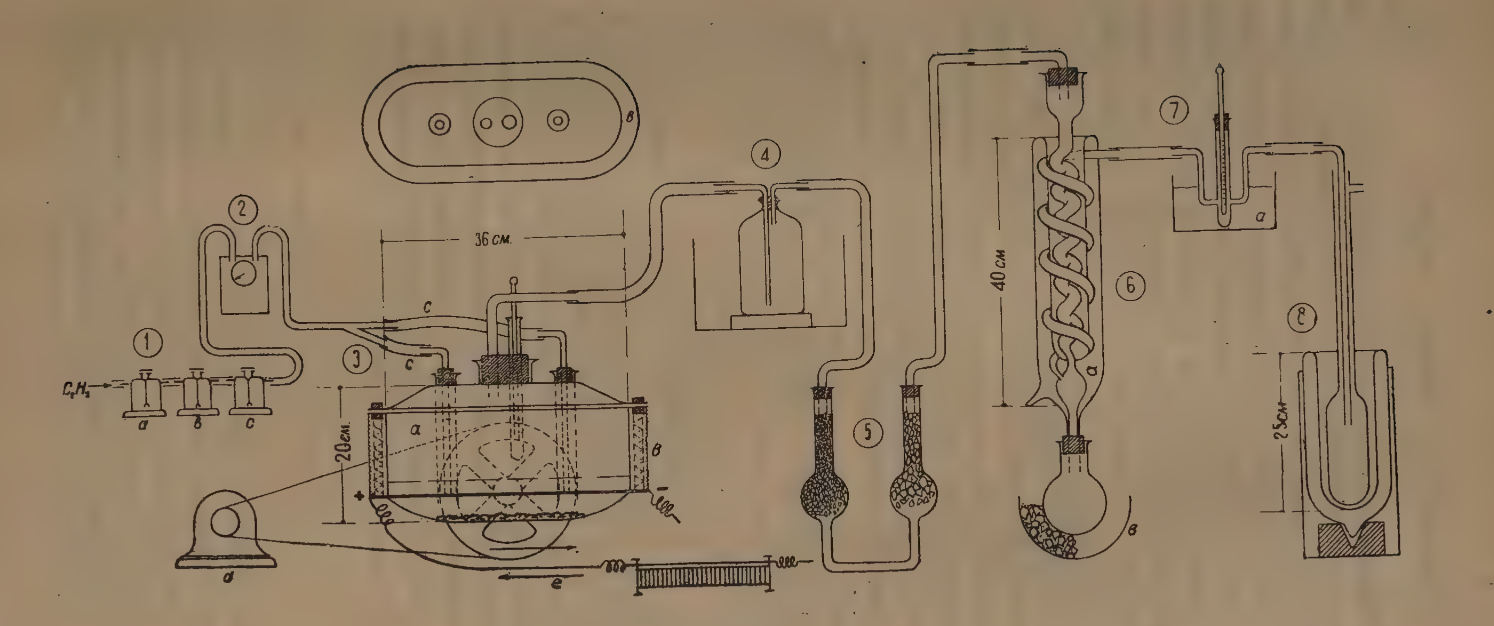
Изучение других продуктов, параллельно образующихся, строение которых еще неизвестно, будет способствовать выяснению механизма полимеризации ацетилена под влиянием солей закиси меди. Соотношения в выходах винил-ацетилена, дивинил-ацетилена и других продуктов находятся в прямой зависимости от времени хранения комплекса. Чем больше это время, тем больше образуется высоко полимерных соединений ацетилена и наоборот.

Это видно на следующей таблице, указывающей на количество получаемых продуктов в зависимости от времени:

Продолжит. хранения комплекса (в часах)	Выход полимеризата в граммах		Выход продуктов в %	
	Винил-ацетилен	Высококип. полимеры	Винил-ацетилен	Дивинил-ацетилен и др.
140	0.24	21.5	1	99
96	0.40	22.4	6	94
50	2.10	17.6	10.5	89.5
36	6.30	16.8	27.5	72.5
24	7.00	14.0	33.0	67.0

Получение винил-ацетилена методом горячей полимеризации

Ацетилен пропускается в медный сосуд *a*, который содержит то же количество и тот же состав ингредиентов, как и в предыдущем случае. Прибор с внешним электрическим обогреванием установлен на механической качалке и нагревается до 80°. Ацетилен входит в прибор через *c* и *c* выходит через выводящую трубку в приемник (4). Продукты полимеризации улавливаются в первом приемнике, который охлаждается снегом, и во втором приемнике, где охлаждение производится смесью твердой углекислоты



Фиг. 1.

1 *a*, *b*, *c* — промывалки для очистки ацетилена; 2 — газовые часы; 3 — реакционный сосуд: *a* — сосуд из красной меди, *b* — электрическое обогревание, *c* — вводящие ацетилен трубки, *d* — мотор, *e* — качалка; 4 — конденсатор для сжижающихся при комнатной температуре продуктов реакции; 5 — осушитель при комнатной температуре газообразных продуктов реакции; 6 — колонка для отделения ацетилена и отгонки винил-ацетилена: *a* — охлаждаемый углекислотой с эфиром или ацетоном сосуд Дюара, *b* — охлаждение приемника смесью льда и соли; 7 — термометр в охладителе (ледяная вода) — температура собираемого в ампулу винил-ацетилена; 8 — ампула в сосуде Дюара с твердой углекислотой с эфиром для собирания отгоняемого винил-ацетилена.

с эфиром (чертеж аппаратуры см. на стр. 149). Полчаса спустя после начала пропускания ацетилена как в первом, так и во втором приемнике, начинает собираться бесцветная жидкость, в таких соотношениях: в первом приемнике, после часа работы собрано 3 см³, во втором 25 см³. При разгонке на колонке Девиса 50 см³ жидкости, полученной во втором приемнике, выделилось 6 л ацетилена; до + 1° не перегналось ни одной капли, от + 5° до + 7° получено 20 см³ остаток — 23 см³. Из остатка удалось выделить 6 см³ жидкости, кипящей 21—23°, которая оказалась ацетальдегидом.

При получении винил-ацетилена первым методом максимальный выход его на прореагировавший ацетилен равен 33%, при получении винил-ацетилена вторым методом выход винил-ацетилена на прореагировавший ацетилен достигает 60—70%.

Для определения строения вещества, кипящего в пределах 5—7° и представляющего винил-ацетилен, оно было подвергнуто каталической гидратации по Кучерову, в результате чего получен был метил-винилкетон. Таким образом, было доказано, что жидкость, кипящая при 5—7°, есть действительно винил-ацетилен.

Получение хлоропрена

20 г винил-ацетилена помещаются в сосуд, который предварительно сильно охлажден и в котором находятся 70 г соляной кислоты (1.19), 10 г полухлористой меди и 4 г хлористого аммония. Затем этот сосуд в течение 3 часов при комнатной температуре подвергается сильному встряхиванию. При вскрытии давления нет. Маслянистый слой отделяется в делительной воронке, промывается водой, сушится сульфатом натрия и разгоняется на водяной бане из колбы с дефлегматором. Жидкость начинает кипеть при 58°, при 59—60° собрано 25 г $n_D^{20°} = 1.4615$ с $D^4/_{20} = 0.9585$.

Этот продукт и есть хлоропрен. Выход хлоропрена равен 80% теории.

После 4—6 дней спокойного стояния при комнатной температуре в запаянном или хорошо закрытом пробкой сосуде хлоропрен превращается в прозрачный пластический продукт, который продолжает полимеризоваться дальше и превращается на 10-й день в твердое резино-подобное вещество. При добавлении к пластическому полимеру пирогалолла задерживается процесс его дальнейшей полимеризации в твердое вещество.

Получение эмульсии хлоропрена в воде

Получение эмульсии хлоропрена в воде производилось нами так:[1] 15 г хлоропрена взбалтывают на качалке до растворения прибавленного к нему мелкоизрезанного 0.5 г природного каучука (светлый креп). Затем при перемешивании прибавляется из воронки по каплям 15 см³ 1% раствора олеата натрия в воде до образования однородной, молочного цвета, жидкости. Полученной эмульсией можно пропитывать ткани. Хлоропрен в эмульсии быстро полимеризуется в белую эластичную массу, отличную от того продукта, который получается при самопроизвольной полимеризации хлоропрена.

N. ZELINSKIJ, N. KOZLOV ET R. STERR. THE SYNTHESIS OF CHLOROPRENE CAOUTCHOUC FROM ACETYLENF

SUMMARY

Vinyl-acetylene and the products of its polimerization first obtained and investigated by American authors have proved to be of general interest. This is particularly the case with regard to the simplest product of the polimerization of acetylene — vinyl-acetylene (dimer of acetylene), which on reacting with hidrogen chloride yields chloroprene. While giving detailed descriptions of the more complex products of the polimerization of acetylene, the above-mentioned authors are quite silent upon the reaction of cuprous salts with acetylene resulting in good yilds of vinyl-acetylene. Chloroprene, as and artificial caotchouc of peculiar appearance and composition, could not but draw our attention.

In our investigation of two years ago we determined the reaction conditions under which the chief product of the polimerization of acetylene was vinyl-acetylene. The transition from the latter to chloroprene offered no difficulty.

---

[1] Ind. and Eng. chem., № 2, стр. 257, 1933.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

СТРОЕНИЕ И СИНТЕЗ НОВЫХ АНТИМАЛЯРИЙНЫХ ВЕЩЕСТВ. I. ПЛАЗМОХИН

И. Л. КНУНЯНЦА, К. С. ТОПЧИЕВА и Г. В. ЧЕЛИНЦЕВА

(*Представлено* Лабораторией по исследованию и синтезу растительных и животных веществ)

Вопрос получения синтетических противомалярийных веществ, способных заменить хинин, является интересным как с теоретической точки зрения связи между строением вещества и его физиологическим действием, так и с практической и экономической, так как разрешение его позволило бы заменить ввозимый на большие суммы хинин. Исходя из этих соображений в Лаборатории по исследованию и синтезу растительных и животных веществ Академии Наук (ЛАСИН), в первом квартале 1931 г. были начаты работы по исследованию существующих заграницей синтетических противомалярийных средств и по синтетическому получению аналогичных им по действию новых препаратов.

Настоящее исследование касается изучения германского противомалярийного препарата «плазмохин», завоевавшего в короткий срок (с 1926 г.) широкую известность заграницей и превосходящего по силе действия хинин.[1]

Немногочисленные литературные данные о строении плазмохина, как о 8-диэтиламино-изопентиламино-6-метоксихинолине, нигде не имеют экспериментального доказательства.[2] При таких обстоятельствах метод прямого синтеза казался нам сомнительным тем более, что полученные нами производные плазмохина не имели характерных констант.

Для исследования нами был получен образец германского препарата «Plasmochin Bayer» в виде таблеток, с содержанием чистого плазмохина 0.02 г в каждой таблетке, а также «Plasmochin vormischung» в виде порошка.

[1] Mühlens. Arch. Schiffs- u. Tropenhyg., 1926, **30**; Roehl, l. c. и 1927, **31**.

[2] Fourneau. Bull. Soc. Ch. Fr., 1930, стр. 627. — K. H. Slotta. Grundriss der modernen Arzneim., 1931, стр. 100. Metallbörse, 1930, № 53, стр. 1462.

После обработки таблеток кипящим спиртом, примерно половина взятого количества переходит в раствор. Остаток по всем пробам представляет собой балластный крахмал, что находится в соответствии с общим весом таблетки и указанным на препарате содержанием плазмохина. Спиртовый фильтрат, после отгонки спирта, обрабатывался раствором щелочи, причем выделялось масло, экстрагируемое эфиром. Из щелочного слоя при подкислении было выделено твердое вещество в виде порошка желтого цвета.

Это вещество было подвергнуто элементарному анализу и как по данным анализа, так и по сопоставлению свойств с приготовленным синтетически продуктом было признано нами за метилендиоксинафтойную кислоту, упоминающуюся в патентах фирмы I. G. F. в качестве кислоты, применяемой для образования твердых солей с некоторыми органическими основаниями.

Вещество, отделенное эфиром от щелочного раствора, оказалось жидким основанием, в главной массе перегоняющимся при 200—205° (2 мм), представляло собой действующее начало препарата и явилось объектом всего дальнейшего исследования.

Для характеристики выделенного нами основания и сравнения его с предполагаемым 8-диэтиламино-изопентиламино - 6-метоксихинолином нами был, в первую очередь, произведен следующий ряд определений и экспериментов:

1. Определение молекулярного веса дало в одном случае 299, в другом 300, что в пределах точности метода удовлетворительно согласуется с вышеуказанной формулой.

2. Элементарный анализ дал в трех определениях цифры, отвечающие формуле $C_{19}H_{29}ON_3$.

3. Определение метоксилов по Цейзелю дает 9.69% содержания метоксилов, что совпадает с теоретическим количеством 9.84% для одного метоксила в указанной формуле.

4. При окислении основания хамелеоном в щелочной среде, а также при окислении перекисью водорода[1] было доказано образование хинолиновой кислоты, которая была выделена в виде медной соли и оказалась по всем свойствам и анализу медной соли тождественной с медной солью хинолиновой кислоты, полученной окислением хинолина в тех же условиях. Таким образом, было подтверждено, что пиридиновое кольцо хинолинового ядра основания свободно от заместителей.

[1] W. Stix und G. Bulgatsch. Ber., 1932, I, 13.

5. Положение метоксила и аминогруппы в бензольном кольце хинолинового ядра было доказано расщеплением исчерпывающе метилированного основания, причем были выделены фракции, в которых содержался 8-диметиламино-6-метоксихинолин. Последний был превращен в пикрат и оказался идентичным с пикратом синтетического 8-диметиламино-6-метоксихинолина.

Отщепление алкиламинного остатка проведено окислением на холоду основания плазмохина марганцовокалиевой солью в кислой среде. Полученное при этом вещество оказалось бесцветной, подвижной жидкостью с запахом пиперидина, и, как показало дальнейшее его изучение, имело строение 1-диэтиламино-4-аминопентана:

$$CH_3-\underset{\substack{|\\NH_2}}{CH}-CH_2-CH_2-CH_2-N\langle\begin{matrix}C_2H_5\\C_2H_5\end{matrix}$$

Такое строение полученного при окислении вещества вытекает из следующих данных:

1) При нагревании его с избытком уксусного ангидрида образуется моноацетильное производное.

2) При действии иодистого метила на ацетильное производное образуется соль четвертичного аммониевого основания. Аммониевое основание, выделенное из соли влажной окисью серебра, было подвергнуто Гоффмановскому расщеплению; при этом было доказано образование диэтилметиламина: приготовленные из него пикриновая и золотая соли оказались тождественными с пикриновой и золотой солями диэтилметиламина, полученного синтетически.

3) Эти факты, а также образование моноацетильного производного основания плазмохина говорят о наличии в молекуле данного соединения одной первичной и одной третичной аминогрупп, что нашло себе дополнительное подтверждение в отношении диамина к азотистой кислоте. Диамин в обычных условиях не реагирует с азотистой кислотой, что характерно для подобных первично-третичных жирных диаминов.[1]

4) Вопрос о положении первичной и третичной аминогрупп в цепи был решен, в соответствии с температурой кипения диамина и правильностью возрастания температур кипения в гомологическом ряду жирных диаминов с нормальной цепью, сиинтезом 1-диэтиламино-4-амино-пентана.

[1] J. v. Braun. Ber., 43, 2872.

1-Диэтиламино-4-аминопентан был синтезирован двумя способами:

а) Из ацетопропилового спирта рядом реакций, не допускающих сомнения в строении конечного продукта:

$$CH_3—CO—CH_2—CH_2—CH_2OH \rightarrow$$
$$\rightarrow CH_3—CO—CH_2—CH_2—CH_2Br \rightarrow$$
$$\rightarrow CH_3—CO—CH_2—CH_2—CH_2N(C_2H_5)_2 \text{ и далее:}$$

$$CH_3—C({=}NOH)—CH_2—CH_2—CH_2—N(C_2H_5)_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow CH_3—CH(NH_2)—CH_2—CH_2—CH_2—N(C_2H_5)_2$$

б) Путем кетонного расщепления 1-диэтиламино-этилацетоуксусного эфира, полученного действием на натрацетоуксусный эфир диэтиламинохлорэтана и дальнейшим превращением полученного 1-диэтиламино-4-пентанона по схеме а.

Полученный этими способами диамин оказался по всем свойствам идентичным диамину, выделенному нами при окислении плазмохина.

Таким образом вышеприведенное строение ядра и алкиламинной части плазмохина не оставляло сомнения.

Строение самого основания плазмохина как 8-(1-диэтиламино-1-метилбутил)-амино-6-метоксихинолина было подтверждено синтезом его из 1-диэтиламино-4-аминопентана, полученного вышеуказанным способом и 6 метокси-8-иодхинолина, синтезированного нами из 6-метокси-8-амино-хинолина:

$$\text{(6-}CH_3O\text{-8-J-хинолин)} + CH_3—CH(NH_2)—CH_2—CH_2—CH_2N(C_2H_5)_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{(6-}CH_3O\text{-хинолин-8-)}NH—CH(CH_3)—CH_2—CH_2—CH_2N(C_2H_5)_2$$

Полученный продукт оказался идентичным германскому плазмохину.

Для идентификации, кроме температуры кипения, молекулярной рефракции и анализа, служила приготовленная нами твердая соль, из синтезированного основания и 2—(2′—4′-диоксибензоил) — бензойной кислоты. Эта соль по температуре плавления не отличалась от соли той же кислоты с основанием германского плазмохина.

После окончания настоящей работы (конец 1931 года) появилось сообщение, подтвердившее правильность сделанных здесь выводов о строении плазмохина.[1]

Разработанная здесь методика может найти применение при исследовании подобных веществ.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

I. Выделение действующего начала из препарата „Plasmochin Bayer"

Полученный нами материал представлял собою таблетки желтого цвета. 400 г таблеток плазмохина были измельчены в тонкий порошок и нагревались 3 часа с 1 л спирта на водяной бане с обратным холодильником. При этом, примерно половинная часть вещества перешла в раствор и была отфильтрована от белого осадка, оставшегося в колбе. Этот остаток вновь дважды обрабатывался кипящим спиртом, вытяжки отфильтровывались от белого осадка, и от окрашенных в интенсивно желтый цвет соединенных вытяжек был отогнан спирт.

Остаток после отгона спирта представлял собой густой сироп, медленно застывающий в кристаллическую массу. Он был обработан крепким раствором щелочи, причем часть вещества перешла в раствор, часть же выделилась в виде окрашенного в темный цвет масла, которое было несколько раз проэкстрагировано эфиром. Эфирная вытяжка сушилась прокаленным поташом, эфир отгонялся, и оставшееся масло было перегнано в вакууме. Главная часть перегналась при 2 мм в пределах 200—205°.

II. Выделение метилен-ди-β-оксинафтойной кислоты

Щелочный раствор, оставшийся после обработки эфиром, нагревался короткое время на водяной бане для удаления остатков эфира и обрабатывался разбавленной соляной кислотой, причем выделялся осадок желтого цвета. Осадок был отсосан и промыт несколько раз водой. После сушки он

1 W. Schulemann, F. Schönhöfer u. A. Wingler. Klinische Wochenschrifft, февр., 1932.

представлял аморфное, желтого цвета вещество, нерастворимое в кислотах. в холодной и горячей воде, спирте, бензоле, хлороформе, четыреххлористом углероде, бензине, толуоле и др.; легко на холоду растворимо в пиридине, в едких щелочах, а также в соде. Вещество на платиновой пластинке сгорало целиком.

Судя по полученным данным, вещество представляло собой органическую кислоту. Температура плавления около 299° (не корр.) с разложением (начинает темнеть около 280°). Вещество было перекристаллизовано из ацетона, высушено в вакуум-эксикаторе и проанализировано.

Анализ:

I. Навеска 0.1100 г.

Получено:	Найдено:	$C_{23}H_{16}O_6$:
CO_2 0.2869 г	% C = 70.90	Углерода: 71.13%
H_2O 0.0403 г	% H = 4.09	Водорода: 4.12%.

Свойства и анализы с достаточной точностью подходят к динафтилметан-ди-оксидикарбоновой кислоте.[1] Эта кислота, синтезированная нами по Strohbach'у,[2] не растворялась в большинстве обычных органических растворителей и с кислотой, выделенной из таблеток, не давала депрессии при смешанной пробе.

CH_2
OH HO
COOH HOOC

Таким образом, основание плазмохина находится в таблетках в виде соли метилендиоксинафтойной кислоты.

III. Основание, выделенное из плазмохина

1. Вещество, перешедшее из щелочного раствора в эфир и кипевшее в пределах 200—205° при 2 мм представляет собой желтое, слегка флуоресцирующее масло, со слабым запахом; при пробе на вкус основание анестезирует. Оно не кристаллизуется при стоянии и остается жидким при охлаждении до —21°. Коэффициент преломления n_D^{24}—1.5745. Основание нерастворимо в воде, легко растворимо в эфире и спирте. Растворы в разведенных минеральных кислотах окрашены в оранжевый цвет, что характерно для солей 8-аминохинолина и его производных.

[1] Hosaens. Ber., **25**, 3215.

[2] Strohbach, ibid., **34**, 4162.

2. Попытки приготовления кристаллических солей сразу к успеху не привели, несмотря на то, что было применено для солеобразования большое количество различных кислот органических и минеральных. В большинстве случаев получаются соли в виде масла, не кристаллизующегося и при долгом стоянии. В других случаях получаются кристаллические соли, которые, однако, на воздухе чрезвычайно быстро расплываются (хлоргидрат, тартрат).

3. Элементарный анализ основания

а) Взято для анализа . . . . 9.259 мг
получено CO_2 . . . . 24.415 »
получено H_2O . . . . 7.573 »

б) Взято для анализа . . . . 5.765 мг
получено CO_2 . . . . 15.231 »
получено H_2O . . . . 4.447 »

в) Определение азота:
взято вещества для анализа . . . . . 6.477 мг
получено азота 0.78 см^3 25^0 . . . . . р.—748

$C_{19}H_{29}ON_3$:

	Вычислено:	Найдено:
$^0/_0$ Углерода	72.34	71.93; 72.08
$^0/_0$ Водорода	9.20	8.57; 9.08
$^0/_0$ Азота	13.33	13.20

4. Определение молекулярного веса (криоскопическое)

1. Вес вещества 0.2526 г.; вес бензола 16.53 г. депрессия температуры замерзания 0.240° . . . . M = 300
2. Вес вещества 0.2896 г.; вес бензола 16.53 г. депрессия температуры замерзания 0.300° . . . . M = 304
вычислено для $C_{19}H_{29}ON_3$ . . . . M = 315

5. Определение метоксилов по Цейзелю.

Навеска 0.2350 г; получено AgJ — 0.1731 г
Найдено CH_3O — 9.69$^0/_0$; вычислено для $C_{19}H_{29}ON_3$—9.84$^0/_0$.

6. Ацетилирование плазмохина-основания.

При ацетилировании плазмохина-основания избытком уксусного ангидрида образуется моноацетильное производное в виде трудноподвижного масла желтого цвета; температура кипения 1.7 мм — 236°.

7. Метилирование основания и исследование продуктов расщепления

Двукратным метилированием основания иодистым метилом с последующей повторной обработкой свеже-осажденной окисью серебра и Гоффмановским расщеплением было получено, наряду с этиленом и легко-кипящими аминами, густое желтое масло, образующее кристаллический пикрат. Перекристаллизованный из метилового спирта пикрат получается в виде оранжевых иголочек с температурой плавления 224°. 6 метокси-8-диметиламинохинолин синтезирован из 6 метокси-8-аминохинолина кипячением последнего в метилалкогольном растворе с 2 молями едкого кали и небольшим избытком иодистого метила. Пикрат синтезированного 6 метокси-8-аминохинолина плавился при 222° и не давал депрессии при плавлении смешанной пробы с полученным из плазмохина.

8. Окисление плазмохина-основания марганцовокалиевой солью в щелочной среде

2 г основания разболтаны в 200 см³ теплой воды, прибавлено 5 г едкого натра. К щелочной жидкости добавлялся постепенно 5%-ный раствор хамелеона. Смесь нагревалась время от времени погружением в водяную баню до 40°. Хамелеон добавлялся до устойчивой розовой окраски. Избыток $KMnO_4$ был устранен прибавлением 10 см³ спирта. Выпавшая перекись марганца была отсосана и промыта горячей водой. Фильтрат после окисления был упарен до ½ объема и нейтрализован разбавленной H_2SO_4. После прибавления крепкого раствора медного купороса и стояния раствора выделился светлозеленый осадок, который был отсосан и перекристаллизован из азотной кислоты, уд. вес 1.15; хинолиновокислая медь выделилась при этом в виде порошка ультрамаринового цвета. Осадок был отсосан, несколько раз промыт водой и высушен на воздухе.

Анализ медной соли:

Навеска соли		0.0696 г
Вес полученной CuO		0.0135 г
$Cu(C_7H_4O_4N)_2 + H_2O$	треб. CuO	19.24%
	найдено »	19.39%

9. Окисление плазмохина-основания марганцевокалиевой солью в кислой среде

10 г выделенного из плазмохина основания растворялись в 200 см³ 5%-ной серной кислоты. К охлажденному раствору медленно, при постоян-

ном взбалтывании, прибавлялся раствор 6 г $KMnO_4$ в 500 см³ воды. Окисление идет чрезвычайно энергично и хамелеон быстро обесцвечивается. После прибавления всего раствора марганцевокалиевой соли, жидкость была оставлена на ночь, выделившаяся перекись марганца отфильтрована, промыта несколько раз водой и фильтрат упарен в вакууме до объема в 150 см.³ При прибавлении к раствору избытка щелочи появляется сильный аминный запах. Выделившийся продукт был отогнан с паром. При прибавлении к отгону твердой едкой щелочи, вещество высаливается и всплывает на поверхность в виде бесцветной подвижной жидкости. Вещество было проэкстрагировано эфиром, эфирная вытяжка сушилась измельченной в порошок едкой щелочью. После отгона эфира, вещество перегналось при t° 195—198° (не корр.). Получено 2 г.

1-диэтиламино-4-аминопентан. Выделенное при окислении вещество представляет собой легко подвижную, бесцветную жидкость с сильным аминным запахом, напоминающим запах пиперидина. Оно растворимо в воде и смешивается с большинством обычных органических растворителей. На воздухе слегка дымит и притягивает CO_2.

D_4^{20}—0.8296. Коэфф. лучепр. n_D^{20}—1.4442.

Молекулярная рефракция: найдена 50.60; вычислена 51.12.

Азотистая кислота в обычных условиях на амин не действует Пикрат — масло. Аурат — оранжевые призмы с температурой плавления 155°.

Ацетилирование выделенного при окислении амина. 1 г амина смешивался с 3.5 г уксусного ангидрида, нагревался 2 часа с обратным холодильником до слабого кипения уксусного ангидрида. Смесь после ацетилирования разбавлялась водой, нагревалась и охлаждалась. К смеси прибавлялся раствор едкого натра, и продукт реакции высаливался поташом. Масло было проэкстрагировано эфиром и высушено прокаленным Na_2SO_4. Эфир отогнан, остаток перегнан в вакууме. Кипит при 5 мм — 143°—145°. Получено 1 г ацетильного производного. Ацетильное производное — густая жидкость без запаха.

n_D^{16}—1.4638. Аурат — т. пл. 122°—124° (желтый, кристаллический).

Элементарный анализ ацетильного производного:

Навеска вещества	— 0.1001 г.	Вычислено $C_{12}H_{24}ON_2$:		Найдено:
Получено CO_2	— 0.2430 »	Углерода	— 66.00%	66.21%
» H_2O	— 0.1107 »	Водорода	— 12.00%	12.30%

Определение азота:

Навеска 0.1501 г

Получено азота 18.5 см³ (t° — 25°; p = 762).

Вычислено: 14.00%; найдено 14.20%.

Метилирование моноацетильного производного и Гоффмановское расщепление продукта метилирования. 5.5 г ацетильного производного растворено в 10 см³ метилового спирта и к раствору прибавлено 8 г иодистого метила. Смесь кипятилась на водяной бане 5 часов. Спирт и избыток CH_3J отогнаны на водяной бане. Остаток растворен в воде и обработан небольшим избытком влажной окиси серебра. AgJ и окись серебра отфильтровывались и промывались водой. Фильтрат перелит в колбу Вюрца с термометром до дна. Колба, нагреваемая на масляной бане, соединена через холодильник: 1) со склянкой Тищенко с небольшим количеством разбавл. HCl и 2) с цилиндром для собирания газов, наполненным водой. При постепенном нагревании содержимого колбы до 110—115° идет отщепление амина, что заметно по разогреванию кислоты. Одновременно происходит отделение газа (этилен), собирающегося в приемнике.

Содержимое склянки Тищенко выпарено до-суха в фарфоровой чашке на водяной бане, остаток перенесен в колбу. В колбу приливалась крепкая щелочь, и продукты разложения перегонялись в раствор пикриновой кислоты. После небольшого упаривания пикринового раствора, выделяется кристаллический пикрат, который после перекристаллизации из горячей воды получается в виде желтых игол с температурой плавления 182—184°.

Золотая соль амина получена в виде мелких желтых кристаллов с температурой плавления 210°.

Получение синтетического диэтилметиламина. Для подтверждения строения выделившегося при Гоффмановском расщеплении амина, был получен синтетический диэтилметиламин. Для этого триэтиламин был обработан иодистым метилом и после обработки влажной окисью серебра подвергнут Гоффмановскому расщеплению. При этом почти количественно происходит отщепление этилена. Полученная пикриновая соль после перекристаллизации плавилась при 181°. Смешанная проба с пикратом диэтилметиламина из диамина плавится при 180°. Смешанная проба с золотой солью диэтилметиламина из диамина плавится при 209°.

Получение синтетического 1-диэтиламино-4-аминопентана.

а) Ацетопропиловый спирт, служивший нам исходным материалом для указанного синтеза, готовился по Lipp'у [1] и с лучшими результатами по Ehrenthal'ю [2] из этиленбромида и натр-ацетоуксусного эфира.

б) 1-бром-пентанон-4 был получен действием насыщенной при 0° бромистоводородной кислоты на ацетопропиловый спирт.

[1] Lipp. Ber., 22, 1192.

[2] Ehrenthal. Monatsh. f. Ch., 24, 351.

в) 1-диэтиламино-пентанон-4 был получен действием диэтиламина на 1-бром-пентанон-4 при нагревании на водяной бане в течение 2 часов.

г) Восстановление оксима 1 диэтиламино-4 пентанона (в 1-диэтиламино-4-аминопентан). К раствору 20 г аминопентанона в 100 см³ воды прибавлено теоретическое количество водного раствора хлоргидрата гидроксиламина. Раствор стоял ночь, разбавлялся водой и к нему прибавлялась при взбалтывании маленькими порциями 4%-ная амальгама натрия в 7-кратном против теории количестве. Реакция поддерживалась все время слабо кислой добавлением уксусной кислоты; масса подщелачивалась, и образовавшийся амин отгонялся с водяным паром. Водный раствор насыщался поташом, и всплывший амин экстрагировался эфиром; температура кипения полученного амина 196°—199°.

D_4^{20}—0.8296. n_D^{20}—1.4441.

10. Получение 6-метокси-8-иодхинолина. К 10 г 6 метокси-8 аминохинолина, находящимся в колбе с мешалкой, было прибавлено 40 см³ воды и 20 см³ серной кислоты. Смесь охлаждалась холодильной смесью и при работе мешалки в колбу постепенно было прибавлено 32 см³ холодного 15%-го раствора $NaNO_2$ и затем раствор 23 г KJ в 100 см³ воды. Когда выделение газа закончилось, в колбу добавлялся раствор щелочи, и щелочная смесь была несколько раз проэкстрагирована кипящим петролейным эфиром. По охлаждении эфира 6-метокси-8-иодхинолин выпадает в виде иголочек. Температура плавления 108—110°. Выход около 60% теории.

11. Синтез 8-(4-диэтиламино-1 метил-бутил) амино-6 метоксихинолина. 4 г 6-метокси-8-иодхинолина нагревались с 5 г 1-диэтиламино-4-аминопентана на масляной бане при 150° в течение 6 часов в присутствии небольшого количества медной бронзы.

Продукт реакции был несколько раз обработан небольшими порциями разбавленной горячей уксусной кислоты и затем воды. Вытяжки отделялись от оставшегося кристаллического осадка и, после фильтрования, были разложены раствором щелочи и подвергнуты перегонке с паром. Оставшееся в колбе от перегонки с паром коричневое масло было извлечено эфиром, эфирная вытяжка высушена поташом, эфир отогнан, масло перегнано в вакууме и по температуре кипения, так же как и по остальным свойствам соответствовало плазмохину. Соль с 2-(2′—4′ диоксибензоил)-бензойной кислотой — желтый мелкокристаллический порошок с температурой плавления 102—105° идентична той же соли плазмохина.

ВЫВОДЫ

До и во время предпринятого нами исследования строения плазмохина в литературе появились отрывочные сведения о его строении, как диэтиламино изопентил-8-амино-6 метокси-хинолина; данные эти, однако, не были подтверждены экспериментальными работами, что не давало уверенности в вышеприведенном его строении.

Нами было выделено основание из препарата «плазмохин», и после определения его молекулярного веса, элементарного анализа, определения метоксилов по Цейзелю, было изучено строение цепи. При окислении плазмохина основания марганцевокалиевой солью, был выделен жирный диамин. Он имел строение 1-диэтиламино-4-аминопентана. Строение ядра было доказано образованием хинолиновой кислоты, полученной при окислении плазмохина в щелочной среде и кроме того расщеплением исчерпывающе метилированного основания и выделением при этом 8-диметиламино-6 метоксихинолина, чем определялось положение метоксила и аминогруппы в ядре. Плазмохин был синтезирован нагреванием 6-метокси-8 иодхинолина с 1-диэтиламино-4 аминопентаном и идентифицирован в виде соли 2-(2′—4′ диоксибензоил) бензойной кислоты.

Москва. Лаборатория по исследованию и синтезу
растительных и животных веществ АН

I. KNUNIANZ, K. TOPČIEV und G. CĔLINZEV. DIE STRUKTUR UND DIE SYNTHESE DES PLASMOCHINS

ZUSAMMENFASSUNG

Bis und zur Zeit unserer Untersuchung der Struktur des Plasmochins erschienen in der Literatur fragmentarische Mitteilungen, die ihn als N-Diäthylaminoisopentyl-8 amino-6 methoxy-chinolin betrachten. Dieses wurde aber nicht durch experimentalle Versuche bestätigt, was keine Sicherheit gab, dass dem Plasmochin wirklich die obergenannte Struktur zukommt.[1]

Es wurde aus dem Präparat Plasmochin die Base ausgeschieden und nach der Ermittelung des Molekulargewichts, Durchführung der Elementaranalyse, und nach der Bestimmung der Methoxylgruppen nach Zeisel wurde zuerst die Struktur der am Chinolinring sitzenden Kette untersucht. Die Oxydation der Base des Plasmochins mit Kaliumpermanganat in saurer Lösung lieferte ein aliphatisches Diamin, das laut Untersuchung als 1-Diäthylamino-4-aminopentan ermittelt wurde.

Die Konstitution des Kerns wurde bestätigt durch Entstehung der Chinolinsäure, die sich bei der Oxydation des Plasmochins in alkalischer Lösung gebildet hatte und auch durch Abbau-Reaktion durch erschöpfende Methylierung der Base und Ausscheidung des 8-Dimethyl-amino-6-methoxychinolins; daraus ersieht man die Lage der Methoxyl- und Aminogruppen im Kern. Plasmochin wurde durch Erhitzung des 6-Methoxy-8-iodchinolins mit 1-Diäthyl-amino-4-aminopentan synthesiert und als Salz der 2-(2′—4′—Dioxybenzoyl)-benzoesäure identifiziert.

[1] Als diese Arbeit bereits fertig war (Ende des J. 1931) erschien Mitteilung, welche unsere Ausführungen bestätigt (Kl. Wehsehr, Febr. 1932).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

СТРОЕНИЕ И СИНТЕЗ НОВЫХ АНТИМАЛЯРИЙНЫХ ВЕЩЕСТВ. III. СИНТЕЗ „АТЕБРИНА"

И. Л. КНУНЯНЦА, Г. В. ЧЕЛИНЦЕВА, З. В. БЕНЕВОЛЕНСКОЙ, Е. Д. ОСЕТРОВОЙ и А. И. КУРСАНОВОЙ

(*Представлено* Лабораторией по исследованию и синтезу растительных и животных веществ)

Результаты экспериментального исследования антималярийного препарата «Атебрин», I, сопоставленные с литературными и патентными данными, заставили нас предположить для «Атебрина» строение 2-метокси-6-хлор-9 — (4-диэтиламино-1-метил-бутил) аминоакридина дигидрохлорида. Однако, для окончательного утверждения этой формулы недоставало некоторых данных, как напр. данных о положении заместителей в акридиновом ядре; произвести подобное определение аналитическим путем представлялось весьма затруднительным, что и побудило нас синтезировать вещество предложенной нами формулы для сравнения его физико-химических и терапевтических свойств со свойствами «Атебрина».

Полученный нами синтетически препарат (апрель 1933 г.) представлял собою мелкокристаллический светложелтый порошок с температурой плавления 249—250°, не показывающий температурной депрессии при плавлении смешанной пробы с «Атебрином». Фармакологическое испытание нашего препарата, проведенное в Гос. Тропическом институте, дало тождественные результаты с германским препаратом. Таким образом предложенная нами ранее формула для «Атебрина» нашла свое окончательное экспериментальное доказательство.

Имея в виду большое значение «Атебрина» как прекрасного антималярийного препарата, производство которого в СССР должно сыграть решающую роль в борьбе с малярией, мы обратили большое внимание в наших синтетических работах на выработку наиболее доступных методов и выбор доступного исходного сырья. Описываемый нами ниже путь синтеза избран нами как наиболее целесообразный в отношении технического выполнения, хотя отдельные места несомненно могут быть в дальнейшем

улучшены. 2-метокси-6-хлор-9 — (4-диэтиламино-1-метил-бутил) аминоакридин легко образуется взаимодействием 2-метокси-6, 9-дихлоракридина и 2-амино-5-диэтиламинопентана и таким образом путь синтеза «Атебрина» разбивается на 3 отдельных стадии: 1) синтез акридинового ядра, 2) синтез жирного диамина, 3) соединение ядра с диамином.

Разработанный нами метод выражается следующими схемами

1) Синтез 2-метокси-6, 9-дихлоракридина:

CH_3, NH_2, NH_2 → CH_3, Cl, Cl $\xrightarrow{KM_nO_4}$ $COOH$, Cl, Cl $\xrightarrow[\text{— анизидин}]{\text{пара —}}$

«Меховая Т» сырье для синтеза ядра.

$\xrightarrow[\text{— анизидин}]{\text{пара —}}$ $COOH$, OCH_3, Cl, NH $\xrightarrow[POCl_3]{}$

$\xrightarrow[POCl_3]{}$ Cl, OCH_3, Cl, N

2) Синтез 2-амино-5-диэтиламинопентана:

$$\text{a)}\ CH_3 - CO - CH_2 - COOC_2H_5 \longrightarrow$$
$$\rightarrow CH_3 - CO - CH_2 - CH_2 - CH_2OH \longrightarrow$$
$$\rightarrow CH_3 - CO - CH_2 - CH_2 - CH_2Br \longrightarrow$$
$$\rightarrow CH_3 - CO - CH_2 - CH_2 - CH_2 - N\,(C_2H_5)_2 \longrightarrow$$
$$\rightarrow CH_3 - \underset{\underset{N - OH}{\|}}{C} - CH_2 - CH_2 - CH_2 - N\,(C_2H_5)_2 \longrightarrow$$
$$\rightarrow CH_3 - \underset{\underset{NH_2}{|}}{CH} - CH_2 - CH_2 - CH_2 - N\,(C_2H_5)_2$$

b) $CH_2OH - CH_2 - N(C_2H_5)_2 \longrightarrow CH_2Cl - CH_2 - N(C_2H_5)_2 \longrightarrow$

$\rightarrow CH_3 - CO - CH(CH_2 - CH_2 - N(C_2H_5)_2) - COOC_2H_5 \longrightarrow$

$\rightarrow CH_3 - CO - CH_2 - CH_2 - CH_2 - N(C_2H_5)_2 \longrightarrow$

$\rightarrow CH_3 - C(=N - OH) - CH_2 - CH_2 - CH_2 - N(C_2H_5)_2 \longrightarrow$

$\rightarrow CH_3 - CH(NH_2) - CH_2 - CH_2 - CH_2 - N(C_2H_5)_2$

3) Синтез „Атебрина»:

Cl, OCH$_3$, Cl, N (2-метокси-6,9-дихлоракридин) $+ CH_3 - CH(NH_2) - CH_2 - CH_2 - CH_2 - N(C_2H_5)_2 \longrightarrow$

$\rightarrow$ $CH_3 - CH - CH_2 - CH_2 - CH_2 - N(C_2H_5)_2$, NH, —OCH$_3$, Cl, N.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

2-метокси-6,9-дихлоракридин

I. Получение 2-4-дихлортолуола из 2-4-толуилендиамина

Описано в литературе несколькими авторами. Так Erdmann[1] диазотирует метатолуилендиамин в крепкой соляной кислоте (1.17) с катализатором, приготовленным из хлористой меди. Stouder и Adams[2] применяют бромисто-

[1] B. 24, 2769.
[2] J. Am. Soc., 1927, 2043.

водородную кислоту и катализатор, приготовляемый по Org. Sin. Выходы дихлортолуола по Erdmann'у не превышают 45%, а по Stouder'y и Adams'y 59% от теории.

В результате многочисленных опытов нами был выработан метод получения 2,4-дихлортолуола с выходом 70—77% теории, диазотированием горячего раствора солянокислого метатолуилендиамина в присутствии катализатора, приготовляемого действием на раствор медного купороса и хлористого натра бисульфита натрия.

Пример. Приготовление катализатора: к раствору 465 г медного купороса и 120 г поваренной соли в 1500 см³ воды при размешивании приливают в течение 5—10 минут раствор 100 г бисульфита и 77 г едкого натра в 730 см³ воды. Дают остыть до комнатной температуры, сливают с осадка водяной слой и промывают Cu_2Cl_2 декантацией 3—4 раза. Промытый осадок растворяют в 730 г техн. соляной кислоты (уд. веса 1.14).

Диазотирование: в 3-х литровую колбу, снабженную механической мешалкой и обратным холодильником, помещают 90 г перегнанного метатолуилендиамина, 250 г соляной кислоты (1.14), 590 см³ воды и раствор полухлористой меди в соляной кислоте. Смесь, размешивая, нагревают до кипения. Горелка отставляется, и к реакционной массе при сильном размешивании постепенно в течение 1½—2 часов приливают 1290 см³ 10%-го водного раствора нитрита.

По окончании приливания нитрита смесь перемешивают еще некоторое время (около ½ часа) и перегоняют с водяным паром образовавшийся дихлортолуол. Дихлортолуол получается в виде тяжелого хорошо отстаивающегося масла слабо желтого цвета.

Масло отделяется при помощи делительной воронки, растворяется в 100—120 см³ серного эфира и промывается 3—4 раза 10—15%-м водным раствором едкого натра. Эфирная вытяжка сушится хлористым кальцием и перегоняется. 2-4 дихлортолуол получается в виде бесцветного масла, нацело перегоняющегося при 195—197°.

Выход 90 г, т. е. 76% теории. (Для дальнейшей работы вполне пригоден продукт неперегнанный).

II. Получение 2,4-дихлорбензойной кислоты

Окислением 2,4-дихлортолуола описывается в литературе без точных указаний условий окисления и выходов. Так Lellman[1] окислял 2, 4-дихлор-

[1] A. 231, 315.

толуол крепкой азотной кислотой в запаянных трубках. Belstein и Külberg[1] — хромовой кислотой, причем процесс требовал нескольких недель кипячения. Claus и Stowenhagen[2] окисляли смесь изомерных дихлортолуолов перманганатом, Bornwater и Holleman[3] окисляли 2, 4-дихлортолуол разбавленным раствором $KMnO_4$. Нами было испробовано окисление различными окислителями в различных условиях, причем установлено, что лучшие результаты дает окисление перманганатом калия в нейтральной или щелочной среде.

Пример: В круглодонную колбу, снабженную механической мешалкой, обратным холодильником и капельной воронкой, помещают 50 г 2, 4-дихлортолуола и 1600 см³ воды. Смесь на сетке нагревается до кипения, и к ней при кипячении и постоянном размешивании постепенно приливается раствор 90 г $KMnO_4$ в 1700 см³ воды. Кипячение смеси продолжается в течение 14 часов. Избыток перманганата раскисляется прибавлением небольшого количества метилового или этилового спирта, и непрореагировавший дихлортолуол отгоняется с водяным паром. Остаток в колбе отфильтровывается от MnO_2 и последний промывается несколько раз горячей водой. Соединенные фильтраты упариваются до удобного объема и подкисляются соляной кислотой до кислой реакции на конго. Выпадающая 2, 4-дихлорбензойная кислота отфильтровывается, промывается холодной водой и сушится. Выход 65—75% теории на вступивший в реакцию дихлортолуол. Полученная кислота достаточно чиста для дальнейшей работы

III. Получение 4′-метокси-3-хлор-дифениламина-6-карбоновой кислоты

13 г 2, 4-дихлорбензойной кислоты, 14 г параанизидина, 13 г безводного чистого поташа, 0.2 г медной бронзы и 30 см³ изоамилового спирта нагревались на масляной бане при температуре 150—160° (в масле) в течение 10 часов. Через 2 часа после затвердевания реакционной массы добавлялось еще 25 см³ амилового спирта и нагревание продолжалось. По охлаждении, реакционная масса разбавлялась небольшим объемом воды и от нее отгонялись амиловый спирт и параанизидин.

После охлаждения из водного раствора выпал кристаллический осадок калиевой соли 4′-метокси-3-хлордифениламин-6-карбоновой кислоты. Послед-

[1] A. 152, 224.
[2] A. 263, 225.
[3] R. 31, 227 (1912).

няя отсасывалась, растворялась в воде и разлагалась небольшим избытком разбавленной соляной кислоты.

Полученная из соли кислота совершенно чиста и не требует даже перекристаллизации. Получено кислоты 12 г.

Маточный водный раствор после отделения соли также разлагался соляной кислотой. Выпавшая при этом кислота несколько грязнее и требует одной перекристаллизации из спирта. Получено кислоты — 3 г.

Общий выход составляет 15 г или 80% теории.

IV. Получение 2-метокси-6,9-дихлоракридина

Получение 2-метокси 6,9-дихлоракридина производилось различными путями, согласно указаниям в патентах фирмы I. G. F.[1]

1) 4'-метокси-3-хлор-дифемиламин-6-карбоновая кислота нагреванием в бензольном растворе с эквимолекулярным количеством PCl_5 превращалась в хлорангидрид, который с $AlCl_3$ замыкался в 2-метокси-6-хлоракридон; из последнего нагреванием с PCl_5 получался 2-метокси 6, 9-дихлоракридин.

2) 4'-метокси-3-хлор-дифениламин-6-карбоновая кислота нагревалась с избытком $POCl_3$, причем сразу происходило образование 2-метокси 6, 9-дихлоракридина. Последний способ является более выгодным.

Пример: Смесь 31.5 г 4'-метокси-3-хлордифениламина-6-карбоновой кислоты и 200 см³ хлорокиси фосфора нагревалась в круглодонной колбе, снабженной обратным холодильником, защищенным хлоркальциевой трубкой, на масляной бане при температуре 140—150° в течение 3 часов. От реакционной массы отгонялся избыток $POCl_3$ (температура в масле 150—160°) и остаток вносился в большой объем воды со льдом. Выпавший осадок отсасывался, промывался несколько раз раствором соды, затем водой, сушился и перекристализовывался из бензола. Из бензольного раствора выпадал 2-метокси-6, 9-дихлоракридин с температурой плавления 158—159°. Выход — 85% теории.

2-амино-5-диэтиламинопентан

Для получения 5-диэтил-амино-2-аминопентана нами испытано два различных метода.

1) метод, разработанный на основе патентов фирмы I. G.F. из диэтиламино-этонола и

2) из ацетопропилового спирта.

[1] E. P. 353537; C. 1931, II, 3043.

Нами найдено, что 5-диэтиламино-2-аминопентан может быть легко получен из ацетопропилового спирта, для приготовления которого нами найден прекрасный способ.

До сих пор ацетопропиловый спирт представлял собою весьма трудно доступный продукт, ввиду плохих выходов, даваемых прежними способами его получения. По способу Lippa[1], заключающемуся в действии этиленбромида на натрацетоуксусный эфир, получаются выхода ацетопропилового спирта не свыше $20^0/_0$. Усовершенствование, введенное в этот метод, Possaner'ом и Ehrental'ем,[2] Frank и Kohn'ом[3] мало способствует увеличению выходов. Наш способ, заключающийся в конденсации на холоду натрацетоуксусного эфира с окисью этилена, с последующим омылением продукта конденсации (лактона β-оксиэтил-ацетоуксусной кислоты) обеспечивает выход в $50^0/_0$ от теоретического. Схема превращений такова:

$$\begin{array}{c} CH_3 \\ | \\ C-ONa \\ \| \\ CH \\ | \\ COOC_2H_5 \end{array} + \begin{array}{c} CH_2 \\ | \\ CH_2 \end{array}\!\!>O \rightarrow \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CO \\ | \\ CH-CH_2-CH_2 \\ | \qquad\qquad\quad | \\ CO \quad - \quad\;\; O \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} CH_3 \\ | \\ CO \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2OH \end{array}$$

Ацетопропиловый спирт при действии на него на холоду водной бромистоводородной кислоты превращается в ацетопропилбромид.

Последний с диэтиламином образует 1-диэтиламино-пентанон-4, оксим которого при гидрировании натрием в этиловом или других спиртах образует 5-диэтиламино-2-амино-пентан. Способ является чрезвычайно быстрым, большинство операций идет при комнатной температуре. Способ обеспечивает хорошие выходы и зиждется на доступном сырье. Кроме того, он требует меньшего расхода диэтиламина, так как диэтиламин включается в той стадии превращения, когда скелет диамина уже построен, в то время как способ I. G. F. дает потери диэтиламина в каждой операции, начиная с первой.

1 B. 22, 1197.
2 M. 24, 352.
3 M. 28, 1008.

I. Получение γ ацетопропилового спирта

К спиртовому раствору натрацетоуксусного эфира, приготовленному обычным способом из 125 г ацетоуксусного эфира, 23 г натрия и 400 см³ абсолютного спирта, прибавляется при охлаждении и размешивании 44 г окиси этилена, растворенной в 50 см³ абсолютного спирта. После 12 часового стояния реакционной смеси, спирт отгоняется, остающаяся густая масса разлагается 300 г соляной кислоты в 500 см³ воды и раствор нагревается до кипения 2—3 часа, до окончания выделения углекислоты. Затем раствор насыщается поташом, ацетопропиловый спирт извлекается эфиром, сушится в эфире поташом и фракционируется в вакууме. Температура кипения при 30 мм 115—116°, 144—145° при 100 мм. При обычном давлении ацетопропиловый спирт перегоняется при 207—208° с небольшим разложением. n_D^{20} —1.439. Выход 50% теории (от веса ацетоуксусного эфира — одна третья часть).

II. Получение ацетопропилбромида

20.2 г ацетопропилового спирта растворяются при охлаждении холодильной смесью в 60 см³ насыщенной при 0° водной бромистоводородной кислоты. После получасового стояния реакционная масса выливается в 200 см³ ледяной воды и экстрагируется дважды эфиром. Эфирная вытяжка сушится безводным поташом. Ацетопропилбромид кипит при 10 мм 75°. Выход 80% теории.

III. 1-диэтиламинопентанон-4

32 г ацетопропилбромида при охлаждении холодильной смесью смешивались с 28 г безводного диэтиламина; реакционная масса оставлялась в холодильной смеси на ночь. После 14 часового стояния застывшая в кристаллическую кашу масса нагревалась с обратным холодильником на водяной бане в течение 2 часов. После охлаждения продукт реакции разлагался поташом и от него отгонялся избыточный диэтиламин (отогнано 15 г), остаток экстрагировался эфиром, и эфирная вытяжка сушилась безводым поташом.

После отнесения поташа и отгонки эфира продукт перегонялся при обычном давлении. Температура кипения 203—205°. Выход 70% теории.

IV. Получение оксима 1-диэтилоаминопентанона-4

78 г диэтиламинопентанона при охлаждении холодильной смесью, приливались к раствору 35 г хлоргидрата гидроксиламина в 40 см³ воды.

После 12 часового стояния при комнатной температуре смесь под эфиром разлагалась поташом. Эфирный раствор недолго сушился безводным поташом. После отделения поташа и отгонки эфира, продукт перегонялся в вакууме: оксим 1 диэтиламинопентанона-4 кипит при 10 мм 137—138° n_D^{16} — 1.4752. Выход 78 г 90% теории. С равным успехом применим гидроксиламинсульфат.

V. Получение 5-диэтиламино-2-амино-пентана гидрированием оксима натрием в спирте

26 г безводного оксима растворялись в 350 см³ абсолютного спирта. Раствор нагревался до кипения на водяной бане и после отставления бани, через холодильник, к раствору быстро давалось 40 г (нарезанного большими кусками) металлического натрия. По растворении натрия смесь разлагалась 300 см³ воды и диамин перегонялся с паром. Погон быд подкислен соляной кислотой, выпарен до небольшого объема, разложен щелочью и высолен поташом. Диамин был проэкстрагирован эфиром. Выход диамина 15 г (65% теории), температура кипения 196—198°. При применении амилового или бутилового спиртов выхода повышаются до 78%.

VI. Диэтиламинохлорэтан

В круглодонную колбу, снабженную механической мешалкой, обратным холодильником, капельной воронкой и приспособлениями, хорошо защищающими от доступа влаги воздуха, помещался раствор 205 г диэтиламино-этанола в 500 см³ абсолютного, свободного от тиофена бензола. К раствору при перемешивании и охлаждении колбы холодильной смесью медленно, в течение 2 часов по каплям приливалось эквимолекулярное количество тионилхлорида. По окончании приливания холодильная смесь отставлялась, и колба медленно нагревалась на водяной бане в течение 6 часов. Бурное в начале выделение SO_2 совершенно прекращается. По охлаждении, кристаллический хлоргидрат диэтиламинохлорэтана отсасывается, промывается бензолом и сушится в вакууме на водяной бане. Выход 95% теории (светлосерые иглы).

Для получения свободного диэтиламинохлорэтана полученная соль растворялась в минимальном количестве воды и разлагалась при наружном охлаждении холодильной смесью, избытком мелкого сухого поташа; полученная густая (от выпавщего KaCl) каша отфильтровывалась на воронке со стеклянным фильтром. После отфильтровывания отделяется верхний масляный слой диэтиламинохлорэтана. Осадок на воронке и водный раствор

экстрагируются эфиром. Эфирная вытяжка присоединяется к основной массе продукта. Продукт сушится прокаленным поташом. Осушитель отфильтровывается и эфир отгоняется с дефлегматором. После отгонки эфира диэтиламино-хлорэтан может быть перегнан в вакууме, но для дальнейших работ вполне пригоден и неперегнанный продукт. Выход диэтиламинохлорэтана из соли 85% теории.

VII. Диэтиламиноэтилацетоуксусный эфир

23 г металлического натрия растворялись в колбе, снабженной обратным холодильником, защищенным от влаги воздуха хлорокальциевой трубкой, в 420 см³ абсолютного спирта (спирт абсолютировался дважды окисью кальция, а затем металлическим кальцием). Полученный раствор приливался при охлаждении к 130 г свеже-перегнанного ацетоуксусного эфира. Реакционная колба была снабжена механической мешалкой с ртутным затвором, обратным холодильником, капельной воронкой и термометром. К образовавшемуся натрацетоуксусному эфиру медленно в течение 2—3 часов приливалось при 50° и постоянном размешивании 135 г диэтиламиноэтилхлорида. По окончании приливания смесь оставлялась стоять на ночь, затем 3 часа при размешивании кипятилась на водяной бане. От реакционной массы отгонялся спирт (при размешивании), к остатку прибавлялось 50 см³ воды и 300 см³ эфира. Отфильтровывался выпавший хлористый натрий и после отделения небольшого количества воды эфирный раствор сушился безводной глауберовой солью; соль отфильтровывалась, и эфирный раствор перегонялся, После отгонки эфира собиралась фракция, кипевшая при 5 мм 115—120° (при 12 мм 134—140°). Выход 37—40% теории. Конденсация в бензоле дает несколько лучшие выхода.

VIII. Диэтиламинопентанон

105 г β-диэтиламино-этилацетоуксусного эфира нагревались на кипящей водяной бане с 1000 г 10%-й серной кислоты в течение 10 часов. По охлаждении масса сильно подщелачивалась мелким сухим поташом и перегонялась с водяным паром. Диэтиламинопентанон нацело перегоняется с первыми 500 см³ воды. Водный погон насыщается сухим поташом. Продукт отделялся, сушился поташом и перегонялся. Температура кипения 202—205°. Выход 64 г (89% теории).

Полученный таким образом диэтиламинопентанон превращался в 5-диэтиламино-2-амино-пентан через оксим, как это описано выше.

2-метокси-6-хлор-9 (4-диэтиламино-1-метилбутил) акридин, дигидрохлорид „Атебрина"

В круглодонную колбу, снабженную механической мешалкой и обратным холодильником, погруженную в кипящую водяную баню вносились 110 г фенола, 25 г 2-метокси 6, 9-дихлоракридина и к раствору в течение 20 минут приливалось 16 г 5-диэтиламино-2-аминопентана. Перемешивание при нагревании продолжалось еще $1^1/_2$ часа, после чего реакционная масса выливалась (при размешивании) в 2-n. раствор едкого натра. Щелочной раствор экстрагировался эфиром. Эфирная вытяжка промывалась водой и продукт извлекался из эфира разбавленной уксусной кислотой.

Уксуснокислый раствор для очистки обрабатывался эфиром и разлагался затем аммиаком; при этом выпадает основание в виде светложелтого трудно подвижного масла. Последнее экстрагировалось эфиром и в эфире сушилось безводным поташом.

В эфирный раствор, отфильтрованный от поташа, пропускался сухой газообразный хлористый водород. Выпавший в виде желтого порошка хлоргидрат отфильтровывался и промывался эфиром. Получено 30 г. Выход 72% теории. Для полной очистки продукт дважды перекристаллизовывался из спирта или горячей воды. Высушенный препарат представляет собою мелкокристаллический порошок светложелтого цвета с температурой плавления 248—250°, хорошо растворимый в воде. Водные растворы обладают горечью хинина.

Анализ

5.268 мг вещества дали CO_2 — 11.243 мг; H_2O = 3.155 мг 9.270 мг вещества дали N — 0.725 см³ при 742 мм и 14°.

Вычислено для $C_{23}H_{32}ON_3Cl_3$	найдено
C — 58.41%	58.20%
H — 6.77	6.65
N — 8.88	9.08

Смешанная проба плавления синтезированного вещества с «Атебрином», выделенным из таблеток, депрессии не дает. Таким образом полученный нами дихлоргидрат 2-метокси-6-хлор-9 (4-диэтиламино-1-метилбутил) амино-акридина, по всем свойствам и анализу, является тождественным с «Атебрином». Этим окончательно доказывается строение «Атебрина» и, следовательно, уже ранее приданная ему нами формула.

I. KNUNIANZ, C. CELINCEV, Z. BENEVOLENSKAJA, E. OSETROVA et A. KURSANOVA.

LA STRUCTURE ET LA SYNTHÈSE DES COMPOSITIONS ANTIMALARIENNES.
III. LA SYNTHÈSE DE „ATEBRIN“

RÉSUMÉ

Les résultats de nos travaux sur les compositions antimalariennes ont rendu probable pour l'atébrine la formule que voici:

2 méthoxy = 6 chlore = 9 (1-diéthyl-amino-4 méthyl-bouthyl) = amino-acridine. Dans l'étude présente nous donnons la déscription de la synthèse de cette matière par une série de réactions:

2,4 = méthatolouilènediamine → 24 dichloro tolonilène → 2,4 = dichlorobenzoique acide → 3 = chloro-4' = méthoxydiphénylamine-6-carbonique acide → → 2 méthoxy = 6,9 dichloro-acridine.

Par le chauffage de ce dernier dans une solution de phénol avec 2-amino-5 diéthylaniminopentane on a obtenu-2-méthoxy-6 chloro-9 (1-diéthyl-amino-4-méthyl-bouthyl)-amino-acridine. Son dichlorhydrate s'est trouvé identique à l'atébrine.

Pour la synthèse avec 2-amino-5 diéthylaminopentane on a utilisé l'alcool γ-acéthyl-propylique (ce dernier ayant été obtenu par une méthode de notre invention qui donne de bons résultats). L'alcool γ acétylpropylique se transformait en γ-bromepropyl-méthyl — cétone, celui-ci — en diéthylaminopentanone-4, dont l'oxyme était rétabli par le sodium dans l'alcool en 2-amino-5-diéthyl-amino-pentane.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

СТРОЕНИЕ И СИНТЕЗ ИЗОПИЛОКАРПИНА

Н. А. ПРЕОБРАЖЕНСКОГО, А. Ф. ВОМПЕ и В. А. ПРЕОБРАЖЕНСКОГО

(Представлено Лабораторией по исследованию и синтезу растительных и животных веществ)

До настоящего времени синтез пилокарпина и его стереоизомера — изопилокарпина — важнейших алкалоидов листьев Iaborandi еще не осуществлен, хотя имели место многочисленные попытки к этому. Мы сделаем ссылки только на некоторые из них: Hardy et Calmels,[1] Merck,[2] Knudson,[3] Petit et M. Polonovski,[4] Frank Lee Pyman,[5] Jean Sarasin[6] и другие. Строение пилокарпина и изопилокарпина можно считать окончательно установленным после работ А. Е. Чичибабина и Н. А. Преображенского,[7] синтезировавших продукты окислительного распада изопилокарпина — пилоповую кислоту I оптически деятельную и идентичную с полученной из изопилокарпина и работой Akabori и Numano,[8] получивших синтетически амил метил имидазол II и идентифицировавших его с продуктом, полученным из изопилокарпина Джоветом.[9] На основании этих работ остается возможной только одна формула пилокарпина (изопилокарпина) III.

```
I  C2H5 — CH — CH — COOH
          |    |
          CO   CH2
           \  /
            O

II  CH3 — CH2 — CH2 — CH2 — CH2 — C — NCH3
                                  ||    |
                                  CH    CH
                                   \   //
                                     N
```

[1] C. R., t. 102, p. 116, 1251 et 1562; Bull. Soc. Chem., 1887, t. 2, p 219.
[2] Merk's Berichte, 1896.
[3] B. Pharm., t 6, p. 164.
[4] Bull., 17, 554 (1897).
[5] Journ. chem. Soc., London, 101, 530—44 (1912).
[6] K., VI, 370—385 (1923).
[7] B., 63, 460—470 (1930).
[8] B., 66, 159 (1933).
[9] Journ. Chem. Soc., 83, 438 (1903).

```
III  H5C2 — CH — CH — CH2 ┆ — C — NCH3
            |     |       ┆   ||    |
           CO    CH2      ┆   CH   CH
             \  /         ┆     \  //
              O           ┆       N
```

Работа А. Е. Чичибабина и Н. А. Преображенского привела также наряду с работой Langenbeck'a[1] к установлению стереоизомерных отношений между пилокарпином и изопилокарпином.

Langenbeck блестяще доказал взаимоотношение пилокарпина и изопилокарпина следующим ходом экспериментальной работы: он получил из обоих алкалоидов при окислении метиламиды двух различных кислот, состава гомопилоповой кислоты. Таким образом, он сделал заключение, что разница в строении пилокарпина и изопилокарпина находится не в имидазольном кольце, а исключительно в лактонном остатке. Стереоизомерная сущность различия строения лактонных остатков доказана работами А. Е. Чичибабина и Н. А. Преображенского. Они получили синтетически оба антипода пилоповой кислоты и оба антипода изопилоповой и осуществили превращение одной в другую в тех же условиях, что и изомеризация пилокарпина в изопилокарпин. В настоящее время такого же рода работа проделана нами и для гомопилоповых кислот.

Окончательным подтверждением приведенного строения пилокарпина и изопилокарпина является осуществленный нами синтез этих алкалоидов следующим образом:

Хлорангидрид гомоизопилоповой кислоты был получен действием тионилхлорида:

```
H5C2 — CH — CH — CH2 — COOH               H5C2 — CH — CH — CH2 — CO — Cl
        |     |                   SOCl2           |     |                  CH2N2
        CO   CH2                ————————→         CO   CH2               ————————→
          \  /                                      \  /
           O                                         O
```

Реакцией с диазометаном был превращен с хорошим выходом в хлорметилгомоизопилопилкетон:

```
⎡H5C2 — CH — CH — CH2 — CO — CHN2⎤          H5C2 — CH — CH — CH2 — CO — CH2Cl
⎢        |     |                 ⎥   HCl            |     |              /\ CO
⎢        CO   CH2                ⎥ ——————→          CO   CH2            |  |   \ NK
⎣          \  /                  ⎦                    \  /               \/ CO /
            O                                          O                ————————→
```

[1] В., 57, 2072 (1924).

Диазометанирование приводит к прекрасному результату при следующих выработанных нами условиях: к сильно охлажденному раствору диазометана приливают по каплям раствор хлорангидрида-*d*-гомоизопилоповой кислоты. Такой метод работы, в соответствии с взглядами F. Arndt, B. Eistert и I. Amende,[1] приводит к наибольшим выходам диазокетона, который мы затем и разлагали в концентрированном растворе током сухого хлористого водорода при резком охлаждении. Прежде чем остановиться на этом способе были изучены и другие методы разложения, а именно: разбавленной соляной кислотой, конц. соляной кислотой, конц. бромистоводородной кислотой, иодом, уксусной, винной, пара-нитробензойной и другими органическими кислотами. Результаты этого исследования и описания полученных при этом веществ составят предмет отдельного сообщения.

Превращение хлорметилгомоизопилопилкетона в аминометилгомоизопилопилкетон было осуществлено с успехом по методу S. Gabriel, G. Pinkus[2] действием фталимидкалия и последующим омылением с выходом 46.2% на фталимидное производное.

$$H_5C_2-\underset{\underset{\diagdown O \diagup}{CO\quad}}{CH}-\underset{\underset{}{\quad CH_2}}{CH}-CH_2-CO-CH_2N\begin{matrix}\diagup CO-\\ \diagdown CO-\end{matrix}C_6H_4 \xrightarrow{HCl}$$

$$\xrightarrow{HCl} H_5C_2-\underset{\underset{\diagdown O \diagup}{CO\quad}}{CH}-\underset{\underset{}{\quad CH_2}}{CH}-CH_2-CO-CH_2NH_2 + C_6H_4\begin{matrix}\diagup COOH\\ \diagdown COOH\end{matrix}$$

Попытка применить другие методы успехом не увенчались, например, в результате реакции хлорметилгомоизопилопилкетона с гексаметилентетрамином получилось весьма медленно кристаллизующееся соединение.

Для дальнейшего образования имидазольного кольца мы воспользовались методом Wohl u. Marckwald,[3] а именно: нагреванием хлористоводородной соли аминометилгомоизопилопилкетона с водным раствором рода-

[1] B., 61, 1949 (1928).
[2] B., 26, 2198, (1893).
[3] B., 22. 568, 1357; 25, 2354.

нистого калия, причем получили выход 46.8% на аминометилгомоизопилопил кетон.

```
H5C2 — CH — CH — CH2 — CO
       |     |            |
       CO    CH2          CH2              + KCNS =
         \  /               \
          O                  NH2HCl

     H5C2 — CH — CH — CH2 — C[OHH]N
=           |     |          ||    ||      + KCl
            CO    CH2        CH    CSH
              \  /             \  /
               O                NH

H5C2 — CH — CH — CH2 — C — NH
       |     |          ||   |
       CO    CH2        CH   CSH   хлорное железо
         \  /             \  //    ————————————→
          O                N
```

Выхода 2-меркаптоизопилокарпидина были значительно повышены, когда работа проведена была без выделения в чистом виде хлоргидрата-аминометилгомоизопилопилкетона до 45.4% на взятое фталимидное производное по сравнению с 21.6% для предыдущего.

Для окисления тиолаизопилокарпидина мы после ряда попыток окисления другими методами воспользовались хлорным железом. Этот метод[1] чрезвычайно элегантно и чисто без всяких промежуточных продуктов в отличие от метода, примененного Akabori и Numano,[2] позволил получить нам изопилокарпидин:

```
H5C2 — CH — CH — CH2 — C — NH
       |     |          ||   |         CH3J
       CO    CH2        CH   CH    ——————————→
         \  /             \  //
          O                N
```

Таким образом, мы получили изопилокарпидин — алкалоид, описанный Späth'ом и Kunz'ом[3] и полученный ими при изомеризации природного пилокарпидина.

Späth и Kunz дают температуру плавления для полученного ими изопилокарпидина нитрата 109—111°, наш продукт плавится при 112—113.5°. Для завершения работы изопилокарпидин был превращен в изо-

[1] B., 58, 513 (1925).
[2] B., 66. 151—165 (1933).
[3] B., 58, 513 (1925).

пилокарпин метилированием согласно описанного Späth, Kunz для метилирования пилокарпидина в пилокарпин.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
H_5C_2 & - & CH & - & CH & - & CH_2 & - & C & - & NCH_3 \\
 & & | & & | & & & & \| & & | \\
 & & CO & & CH_2 & & & & CH & & CH \\
 & & \diagdown & O & \diagup & & & & \diagdown & N & \diagup\!\!\diagup
\end{array}
$$

Полученный изопилокарпиннитрат с выходом 33.6% на изопилокарпидиннитрат имел температуру плавления 158—158.5° и был идентичен как по всем своим свойствам, так и по смешанной точке плавления с природным азотнокислым изопилокарпином. При получении изопилокарпина нет необходимости выделять азотнокислый изопилокарпидин, а можно пользоваться основанием изопилокарпидина, полученным непосредственно окислением тиолаизопилокарпидина.

Осуществление перехода от хлоркетона к изопилокарпину возможно и без изолирования и очистки промежуточных стадий, что приводит к значительному повышению общего выхода изопилокарпина. Частичный эффект такого рода работы нами приводится.

Методом, аналогичным изложенному, нами синтезирован и пилокарпин.

Здесь считаем необходимым упомянуть о взаимоотношениях между полупродуктами синтезов пилокарпина и изопилокарпина, а именно любой продукт пилокарпинового ряда может быть изомеризован в соответствующий изопилокарпиновый.

Приведенный синтез изопилокарпина мы считаем общим методом получения производных ряда имидазола и работы в этом направлении нами ведутся.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Хлорангидрид *d*-гомоизопилоповой кислоты

Смесь 7.38 г *d*-гомоизопилоповой кислоты с темп. кипения 160.8° при 0.01 мм и удельным вращением $[\alpha]\frac{15}{D} = 50.98°$ и 40 г тионилхлорида нагревалась на водяной бане при температуре 50—60°, оставлялась на ночь и на следующий день вновь нагревалась при той же температуре несколько часов. Избыток тионилхлорида отгонялся в вакууме. От полученного хлорангидрида отгонялся для удаления последних следов тионилхлорида сухой бензол (три раза по 40 куб. см). Полученный с выходом 98.4% хлорангидрид — светложелтая жидкость с характерным запахом, сиропообразной консистенции, легко растворимая в эфире.

d-хлорметилгомоизопилопил кетон

Для приготовления одной порции эфирного раствора диазометана с содержанием одного грамма этого вещества нагревалась на водяной бане смесь:

5 куб. см нитрозометилуретана, 7.5 куб. см 25% раствора едкого кали в метиловом спирту, 100 куб. см абс. эфира. Эфирный раствор диазометана отгонялся при этом в приемник, помещенный в охладительную смесь льда с солью. В охлажденный эфирный раствор диазометана, полученный из 27 куб. см нитрозомителуретана, содержащий три (3) мол. диазометана приливался по каплям эфирный раствор хлорангидрида-*d*-гомоизопилоповой кислоты (1 мол.). При приливании происходит энергичное выделение пузырей азота, быстро заканчивающееся. Реакционная масса оставлялась в охладительной смеси до следующего дня. Желтого цвета эфирный раствор фильтровался от небольшого хлопьевидного осадка, и эфир отгонялся в вакууме до приблизительно 300 куб. см — половины первоначального объема.

Полученный таким способом эфирный раствор *d*-диазометилгомоизопилопилкетона охлаждался и подвергался разложению током сухого хлористого водорода в продолжение одного часа. Разложение диазокетона, сопровождающееся выделением пузырей азота, начинается лишь спустя некоторое время после начала пропускания хлористого водорода и продолжается 20—30 минут. Эфирный раствор промывался бикарбонатом, сушился сернокислым натром, и эфир отгонялся в вакууме. Остаток представляет кристаллы, пропитанные маслом. Выход сырого продукта 7.17 г = 81.5% теории. Температура плавления высушенных на пористой тарелке кристаллов 71—73°. Хлоркетон — хорошо растворим в спирту, бензоле, четыреххлористом ацителене, теплом эфире, несколько хуже в холодном эфире и был перекристаллизован из абсолютного эфира, например:

из 0.1794 г вещества в 7.2 г абс. эфира получено 0.0996 г
» 0.0996 » » » 4.0 » » » » 0.0450 »

Хлоркетон — белоснежные иглы с температурой плавления 72.5—73.5° напоминает как по виду, так и по физиологическим свойствам *d*-хлорметилгомопилопилкетон. Смешанная проба *d*-хлорметилгомоизопилопилкетона с *d*-хлорметилгомопилопилкетоном плавилась при 53—63°, тогда как сам *d*-хлорметилгомопилопилкетон имеет точку плавления 86—87°.

0.1377 г вещ.: 0.0797 г H_2O, 0.2644 г CO_2;
0.1149 г вещ. 0.0812 г. AgCl; 0.1187 г вещ. 0.0842 г AgCl
Вычислено: C 52.80, H 6.40, Cl 17.33
Найдено: C 52.37, H 6.48, Cl 17.48 и 17.55

Вращение в четыреххлористом ацетилене показало почти в два раза менее слабое вращение, чем для *d*-хлорметилгомопилопилкетона:

0.0226 г вещества дали в 1.6262 г четыреххлористого ацетилена ($d = 1.5942$) в 1 дм трубке при 16.75° $\alpha_D = 1.58°$, отсюда $\left[\alpha\right]_D^{16.75} = +71.31°$.

d-фтальимидометилгомоизопилопилкетон

Раствор 2 г *d*-хлорметилгомоизопилопилкетона в 15 куб. см абсолютного спирта и 1.93 г. тонкоистертого фталимидкалия нагревался в течение 6 часов на водяной бане. К концу нагревания наблюдалось слабое пожелтение. Осадок фталимидкалия исчезал и на дне колбы появлялся мелкий осадок, отличный по виду от фтальимидкалия. На следующий день выделившиеся в большом количестве в виде сростков характерной формы кристаллы отсосаны, промыты 11 куб. см воды, 20 куб. см спирта, 10 куб. см эфира и высушены.

Выход сырого продукта — 1.45 г = 47.1% теории.

Дополнительные количества этого продукта удалось выделить из маточных растворов: они были упарены досуха, полученный остаток — кристаллическая масса была проэкстрагирована сухим бензолом в соклете и бензол отогнан в вакууме. Остаток — некристаллизующееся при охлаждении масло — был смешан с несколькими кубическими сантиметрами абс. этилового спирта и, после тщательного перетирания стеклянной палочкой, закристаллизовался, кристаллы были отсосаны и промыты абс. спиртом. Собрано продукта еще 0.4 г. Таким образом общий выход продукта составляет 60.1% теории.

Фталимидное производное нерастворимо в воде, очень легко растворимо в бензоле, хорошо растворимо в петролейном эфире и четыреххлористом ацетилене. После трехкратной кристаллизации из абсолютного этилового спирта получены бесцветные кристаллы с температурой плавления 121.5—122.5° ниже температуры плавления *d*-фталимидометилгомопилопилкетона. При медленной кристаллизации из петролейного эфира выделились большие великолепно образованные кристаллы

12.014 мг вещества: 0.497 куб. см N (21°, 760 мм)

$C_{17}H_{17}O_5N$

Вычислено . . . . N 4.45

Найдено . . . . N 4.71

Вращение полученного соединения: 0.0324 г вещества дали в 1.6141 г четыреххлористого ацетилена ($d = 1.5942$) в 0.5 дм трубке при 16° $d_D = +0.59$. Отсюда $\left[\alpha\right]_D^{16} = +36.87°$.

d-аминометилгомоизопилопилкетон

(хлоргидрат)

2 г тонко истертого *d*-фталимидометилгомоизопилопилкетона кипятились с 14 куб. см 20% соляной кислоты в продолжение шести часов. При этом продукт превращался в масло, а на следующий день выпадал большой белый осадок, который при подогревании раствора частично вновь превращался в маслянистые капли. К раствору добавлено 6 куб. см 20% соляной кислоты и омыление продолжалось еще 6 часов. Из охлажденного раствора выпало большое количество кристаллов в виде иголочек, которые были отсосаны, промыты водой и высушены. Вес их был 1.01 г. Температура плавления 198—206°, точка плавления фталевой кислоты (Кальбаум) 198—205°, точка плавления смешанной пробы 198—205°. Теоретический выход фталевой кислоты из 2 г. *d*-фталимидометилгомоизопилопилкетона = = 1.05 г.

Фильтрат упаривался в вакууме при 40—50° и закристаллизовавшийся остаток просушен трехкратным прибавлением и отгонкой в вакууме абс. спирта. Продукт очень легко растворим в воде, в метаноле, хорошо в абс. этиловом спирту. Кристаллизация его сопряжена с затруднениями, так как отфильтрованные кристаллы чрезвычайно быстро расплываются на воздухе в желтое масло, в охладительной смеси медленно вновь закристаллизовывающееся в кристаллическую массу. Продукт был перекристаллизован из абс. этилового спирта, с вымораживанием из растворителя в охладительной смеси. Маточные растворы упаривались в вакууме, и выделенный продукт вновь кристаллизовался из этилового спирта с вымораживанием.

Температура плавления кристаллов, высушенных в вакууме над серной кислотой, 158—160°. Выход перекристаллизованного продукта 0.65 г = 46.2% теории.

Аминокетон — белоснежные кристаллы, чрезвычайно гигроскопичные.

22.354 мг вещества: 1.275 куб. см N (18°, 734 мм)

$C_9H_{16}O_3NCl$

Вычислено . . . . . . N 6.32
Найдено . . . . N 6.33

Вращение полученного соединения: 0.0221 г. вещества дали в 1.0181 г воды в 1 дм трубке при температуре = 12.5° $\alpha_D = + 1.25$. Отсюда $[\alpha]_D^{12,5} = + 57.58$.

2-меркапто — 4 (5) — *d*-гомоизопилопилимидазол

(изопилокарпидин-тиол — (2))

0.58 г. хлоргидрата *d*-аминометилгомоизопилопилкетона и 0.30 г роданистого калия растворялись в 0.9 куб. см воды. При этом вначале бесцветный раствор быстро принимает темнокрасный цвет, переходящий при нагревании в желтоватый. После 6 часов нагревания на водяной бане из охлажденного раствора выпадают большие кристаллы.

Выход перекристаллизованного из абс этилового спирта вещества 0.2260 г.

Дополнительные количества этого продукта удалось выделить следующим образом: водные маточные растворы упаривались на водяной бане досуха, сухой остаток экстрагировался абсолютным этиловым спиртом, причем оставался нерастворенный хлористый калий. Спирт отгонялся в вакууме, остающийся продукт кристаллизовался из абс. этилового спирта с вымораживанием. Таким образом удалось выделить еще 0.0510 г кристаллизованного тиола. Общий выход чистого продукта = 46.8% теории на аминокетон.

Так как выход аминокетона из *d*-фталимидометилгомоизопилопилкетона составляет 46%, выход 2-тиолизопилокарпидина на фталимидное производное = 21.6%, впоследствии нам удалось повысить выход тиола до 45.4% на *d*-фталимидметилгомоизопилопилкетон, несколько видоизменив методику получения тиола. Для этого, не выделяя аминокетон в чистом виде, мы переводили его в тиол:

1.38 г *d*-фталимидометилгомоизопилопилкетона омылялись кипячением в течение 16 часов с 14 куб. см 20% соляной кислоты. По охлаждении раствора выпадают кристаллы фталевой кислоты. Получено фталевой кислоты 0.70 г, а должно быть теоретически 0.7272 г. Фильтрат упаривался в вакууме и закристаллизовавшийся остаток просушивался трехкратным прибавлением и отгонкой в вакууме абс. этилового спирта. К остатку было прибавлено 0.49 г роданистого калия в 3 куб. см воды, и полученный раствор нагрет на кипящей водяной бане 8 часов. Выпавшие после охлаждения раствора кристаллы были отсосаны, маточные растворы упарены досуха на водяной бане, и сухой остаток извлечен кипящим абс.

этиловым спиртом. Спиртовая вытяжка упаривалась в вакууме, и выпавший при охлаждении продукт перекристаллизовывался из абс. этилового спирта. Получено 0.45 г вещества, т. е. 45.4% теории на *d*-фталимидометил-гомоизопилопилкетон.

2-тиол-изопилокарпидин легко растворим в горячей воде, значительно менее растворим в холодной воде. При медленном охлаждении горячих водных растворов выделяются большие пластинки. Перекристаллизовывается лучше всего из спирта. Так как точка плавления полученного изопилокарпидин-тиол-(2) очень близко лежит к точке плавления пилокарпидинтиол-(2), полученного нами ранее, была определена температура плавления смеси обоих тиолов:

Изопилокарпидин тиол (2)	206.5 — 208°
Пилокарпидин тиол (2)	207 — 208.5°
Смешанная проба плавилась . . .	185 — 191°

Продукт плавится с разложением, сильно при этом темнея.

11.110 мг вещества: 1.205 куб. см N (20°, 738 мм)

$C_{10}H_{14}O_2N_2S$

Вычислено	N 12.39
Найдено	N 12.03

Вращение полученного соединения: 0.00798 г вещества дали в 0.5856 г метилового спирта ($d = 0.7909$) в 0.5 дм трубке при 15° $\alpha_D = +0.46$. Отсюда $[\alpha]_D^{15} = +85.36$.

Изопилокарпидин и его нитрат

Раствор 0.1306 г 2-меркапто-5(4)-*d*-гомоизопилопил — имидазола и 1.08 г хлорного железа в 20 куб. см воды кипятился в течение 1 часа 20 минут. При этом темножелтый цвет раствора хлорного железа быстро сменяется на зеленоватожелтый хлористого железа. Окисленный раствор подщелочен 50% раствором поташа до сильно щелочной реакции на лакмус. Выпавший гидрат закиси железа, быстро переходящий на воздухе в гидрат закись-окиси, отсасывается, промывается водой, затем хлороформом. Водный щелочной раствор экстрагируется исчерпывающим образом 250 куб. см хлороформа. Соединенные хлороформенные экстракты высушены над сернокислым натром, и хлороформ отогнан в вакууме. К оставшемуся бесцветному маслу — свободному основанию *d*-изопилокарпидина прибавлено 0.0560 г азотной кислоты $d = 1.4$ (65%) в 5 куб. см воды. При слабом подогревании на водяной бане масло переходит в раствор,

который упаривается в вакууме. Остаток после отгонки воды быстро закристаллизовывается уже при температуре бани в 35°. Кристаллы просушены двухкратным прибавлением и отгонкой в вакууме абс. этилового спирта. Температура плавления высушенных на пористой тарелке кристаллов 109—112.5°. Продукт хорошо кристаллизуется из абс. этилового спирта в виде мелких белоснежных блестящих иголочек, легко растворимых в воде. После кристаллизации из абс. этилового спирта точка плавления 112—113.5°. (Разложение с выделением пузырьков). Температура плавления азотнокислого изопилокарпидина, полученного Späth, Kunz (1925 г.) изомеризацией пилокарпидина 109—111°.

После кристаллизации собрано кристаллов 0.0912 г, что составляет 61.4% теории на изопилокарпидин-тиол-(2).

3.637 мг вещества: 6.235 мг CO_2, 1.955 мг H_2O.
11.566 мг вещества: 1.678 куб. см N (18°, 756.5 мм)

$C_{10}H_{15}O_5N_3$

Вычислено . . . . . . C 46.67, H 5.88, N 16.34
Найдено . . . . C 46.75, H 6.01, N 16.60

Вращение плоскости поляризации: 0.0266 г вещества дали в 1.0209 г воды в 0.5 дм трубке при 17° $\alpha_D = +0.36$, отсюда $[\alpha]_D^{17} = +27.63$.

Перевод изопилокарпидина в изопилокарпин

К раствору 0.2258 г азотнокислой соли изопилокарпидина в небольшом количестве воды прибавлено 40% раствора поташа до сильно щелочной реакции на лакмус, и щелочной раствор извлечен 100 куб. см хлороформа в восемь раз. Хлороформенный раствор высушен над сернокислым натром. После отгонки хлороформа в вакууме при 19—20° осталось основание изопилокарпидина — густое, тягучее масло, которое было освобождено от остатков хлороформа нагреванием в вакууме в течение 1 часа при 50—60°. Вес полученного основания изопилокарпидина 0.1773 г. Теоретический выход основания 0.1705 г.

К основанию изопилокарпидина прибавлено 2.15 куб. см иодистого метила, при этом быстро образуется прозрачный раствор, который однако скоро мутнеет и выделяет капли масла. После семнадцатичасового стояния избыток иодистого метила отгоняется в вакууме, полученное желтое масло для освобождения от иодистого метила нагревается в вакууме в течение одного часа при 40—50° и растворяется затем в 1.5 куб. см воды при легком подогревании на водяной бане. К полученному раствору каплями

до сильно щелочной реакции на лакмус прибавлено 3.0 куб. см насыщенного раствора натрбикарбоната, объем водного раствора доведен до 12 куб. см и основание извлечено из щелочного раствора шестикратным встряхиванием с хлороформом (110 куб. см). От высушенного над сернокислым натром раствора хлороформ отгонялся в вакууме при 19—23°.

Остаток — основание изопилокарпина, светложелтое густое масло, нагрет в вакууме для удаления последних следов хлороформа при 50—60° в течение 1 часа 45 минут. Масло при этом слегка темнеет. Вес полученного основания изопилокарпина 0.1197 г. Теоретический выход основания изопилокарпина 0.1828 г.

К раствору изопилокарпина, полученному легким нагреванием на водяной бане основания, в 1 куб. см воды прибавлено 0.0858 г азотной кислоты ($d = 1.4$) в 1.5 куб. см воды. На стенках колбочки вскоре появляются крупные кристаллы, которые при подогревании переходят в раствор.

Остаток после выпаривания раствора в вакууме — кристаллизующееся масло — просушен прибавлением и отгонкой в вакууме несколько раз абс. этилового спирта. Каждый раз при добавлении спирта из масла выпадают большие белые кристаллы. В результате такой обработки остаток целиком закристаллизовался. Полученное вещество растворено в нескольких кубических сантиметрах абс. этилового спирта и вымораживанием получено большое количество бесцветных кристалов. Из спиртовых маточных растворов концентрацией в вакууме и вымораживанием удается выделить еще некоторое количество вещества. Всего собрано 0.08 г = 33.6% теории на изопилокарпидин нитрат. Температура плавления сырого продукта 147.5—151.5°. Кристаллы легко растворяются в воде. Продукт кристаллизуется из абс. этилового спирта в виде белоснежных блестящих иголочек. После пятикратной кристаллизации продукт плавился при 158—158.5°. Природный изопилокарпин нитрат (кальбаум), кристаллизованный из абс. этилового спирта четыре раза, имеет температуру плавления 158—159.8°. Смесь обоих продуктов плавится при 158—159.2°.

Азотнокислый изопилокарпин можно получить также не выделяя изопилокарпидин нитрата непосредственным метилированием основания, полученного в результате окисления изопилокарпидин-тиол-(2).

Например: 0.5000 г тиола изопилокарпидина и 3.4832 г хлорного железа растворялись в 67.5 куб. см воды. Раствор кипятился 2.5 часа. Гидрат закись-окиси железа осаждался 15 куб. см 50% раствора углекислого калия и отсасывался. Щелочной фильтрат извлекался восьмикратным встряхиванием с хлороформом (180 куб. см). После отгонки хлороформа

от высушенного сернокислым натром экстракта, и нагревания оставшегося масла в вакууме при температуре 50—60° в течение часа, получено 0.3891 г. Теоретический выход основания изопилокарпидина 0.4291 г. Полученное основание подвергнуто метилированию с помощью 2.5 куб. см иодистого метила в тех же условиях, как и в предыдущем опыте и выделено 0.2782 г. основания. Теоретический выход основания изопилокарпина из 0.5000 г из изопилокарпидин-тиол-(2) = 0.4600 г. Это основание, переведенное в азотнокислую соль, дало 0.1907 г соли, тогда как у Späth'a, Kunz'a выход сырого пилокарпин нитрата из такого же количества основания пилокарпина, как и у нас, всего 0.1 г.

После кристаллизации из абс. этилового спирта температура плавления полученного продукта та же, что и в первом опыте. Выход азотнокислого изопилокарпина, считая на изопилокарпидин-тиол-(2) = 31.8%.

3.337 мг вещества: 5.994 мг CO_2, 1.933 мг H_2O
12.140 мг вещества: 1.712 куб. см N (20°, 742.8 мм)

$C_{11}H_{17}O_5N_3$

Вычисленно: C 48.68, H 6.32, N 15.50
Найдено : C 48.93, H 6.48, N 15.74

Вращение полученного соединения: 0.0133 г вещества дали в 1.0274 г воды в 0.5 дм трубке при 14° $\alpha_D = + 0.36$. Отсюда $[\alpha]_D^{14} = 55.62$, а в дм трубке при тех же условиях и концентрации $\alpha_D = + 0.72$. Отсюда $[\alpha]_D^{14} = + 55.62$.

Вращение азотнокислой соли природного изопилокарпина, пять раз перекристаллизованного следующее: 0.0266 г. вещества дали в 1.0169 г воды в 1 дм трубке при 16.5° $\alpha_D = + 1.12$. Отсюда $[\alpha]_D^{16.5} = + 42.82$. После многократной кристаллизации повысилось: 0.0133 г вещества дали в 1.0316 г. воды в 1 дм трубке при 16° $\alpha_D = + 0.68$. Отсюда $[\alpha]_D^{16} = + 52.74$.

В заключение считаем необходимым принести глубокую благодарность А. Е. Чичибабину, выдвинувшему эту тему и непосредственно руководившему выполнением первой части ее [1], но к сожалению не смогшему принять участие в настоящей части работы ввиду временного отъезда из СССР.

Москва. Лаборатория по исслед. и синтезу
растит. и животн. веществ Акад. Наук СССР. 25 апреля 1933 г.

[1] B., 63, 460—470 (1930).

К моменту получения гранок статьи о синтезе изопилокарпина нами (Н. А. и В. А. Преображенскими и А. М. Поляковой) была произведена разработка методики синтеза гомопилоповых кислот из пилоповых кислот. Таким образом, синтез пилокарпина и изопилокарпина является окончательно завершенным. Ход синтеза следующий.

Соответствующая пилоповая кислота переводится в ее хлорангидрид, который подвергается восстановлению водородом в присутствии палладиевого катализатора по Розенмунду. Получаемый с хорошим выходом альдегид восстанавливается далее в соответствующий пилоповый алкоголь, а последний действием трехбромистого фосфора в пилопилбромид. Для получения в дальнейшем нитрила с хорошим выходом, бромид лучше перевести в иодид, а затем на иодид действовать цианистым калием.

Полученный таким образом гомопилопилнитрил переводится действием спирта и концентрированной серной кислоты в соответствующий гомопилоповый эфир, а последний омыляется кипячением с умеренно разбавленной соляной кислотой в гомопилоповую кислоту.

Приводим в качестве примера свойства промежуточных продуктов получения гомоизопилоповой кислоты:

1. Хлорангидрид изопилоповой кислоты — бесцветная подвижная жидкость $K_{p\,0.05} = 90.2°$.

2. r-изопилоповый альдегид — бесцветное масло $K_{p\,0.05} = 90°$.

3. r-изопилоповый алкоголь — бесцветная жидкость $K_{p\,0.07} = 116$—$117°$.

4. r-изопилопилбромид — тяжелая бесцветная жидкость $K_{p\,0.06} = 91°$.

5. r-изопилопилиодид — тяжелая жидкость $K_{p\,0.13} = 94°$.

6. Нитрил r-гомоизопилоповой кислоты — слегка зеленоватая жидкость $K_{p\,00.3} = 118°$.

7. Этиловый эфир r-гомоизопилоповой кислоты — подвижное бесцветное масло $K_{p\,0.05} = 98°$.

8. r-гомоизопилоповая кислота — бесцветные кристаллы, т. пл. 74.2°, $K_{p\,0.05} = 155°$.

Настоящая работа поддерживалась Комитетом по химизации народного хозяйства СССР и финансировалась им, за что Лаборатория и авторы считают долгом выразить Комитету глубокую благодарность.

Москва. Лаборатория по исследованию и синтезу
растительных и животных веществ Акад. Наук

N. PREOBRAŽENSKIJ, A. VOMPE and V. PREOBRAŽENSKIJ. THE STRUCTURE AND SYNTHESIS OF ISOPILOCARPINE

SUMMARY

Pilocarpine and its stereoisomer — isopilocarpine, most important alkaloids obtained from the leaves of Jaborandi, have not yet been synthesized, notwithstanding numerous attempts by various authors. The structure of pilocarpine and isopilocarpine was proved by the investigations of A. E. Čičibabin and N. A. Preobraženskij as well as by those of Akabori and Numano. A final corroboration of the structure of these two alkaloids follows from the synthesis of isopilocarpine dealt with in the present paper. By the action of thionilchloride, homoisopilopic-acid was transformed into its chloranhydride. With the aid of diazomethane, diazomethyl homoisopilopilketone and then chlormethyl homoisopilopilketone were obtained from the chloranhydride with good yields. The chlormethylhomoisopilopilketone was transformed into aminomethylketone by the action of potassium phthalimide and subsequent saponification, according to the method of S. Gabriel and G. Pinkus.

In order to form an amidosol ring, chlorhydrate of aminoketone was heated with an aqueous solution of potassium thiocyanide and the resulting mercaptoisopilocarpidine was oxidized by ferric chloride. In this way isopilocarpidine was obtained with good yield. Isopilocarpidine is on alkaloid differing from isopilocarpine by the absence of one methyl group. It was obtained by Späth and Kunz in isomerizing natural pilocarpidine. The constants of our substance coincided fully with those described by the above-mentioned authors. Isopilocarpidine was methylated by means of methyl iodide and thus transformed into isopilocarpine whose melting point (158—158.5°) and all other properties coincided fully with those of natural isopilocarpine. The transition from chlormethyl homoisopilopilketone to isopilocarpine may be effected without the isolation and purification of intermediate substances. This would increase the yield of isopilocarpine and simplify the work.

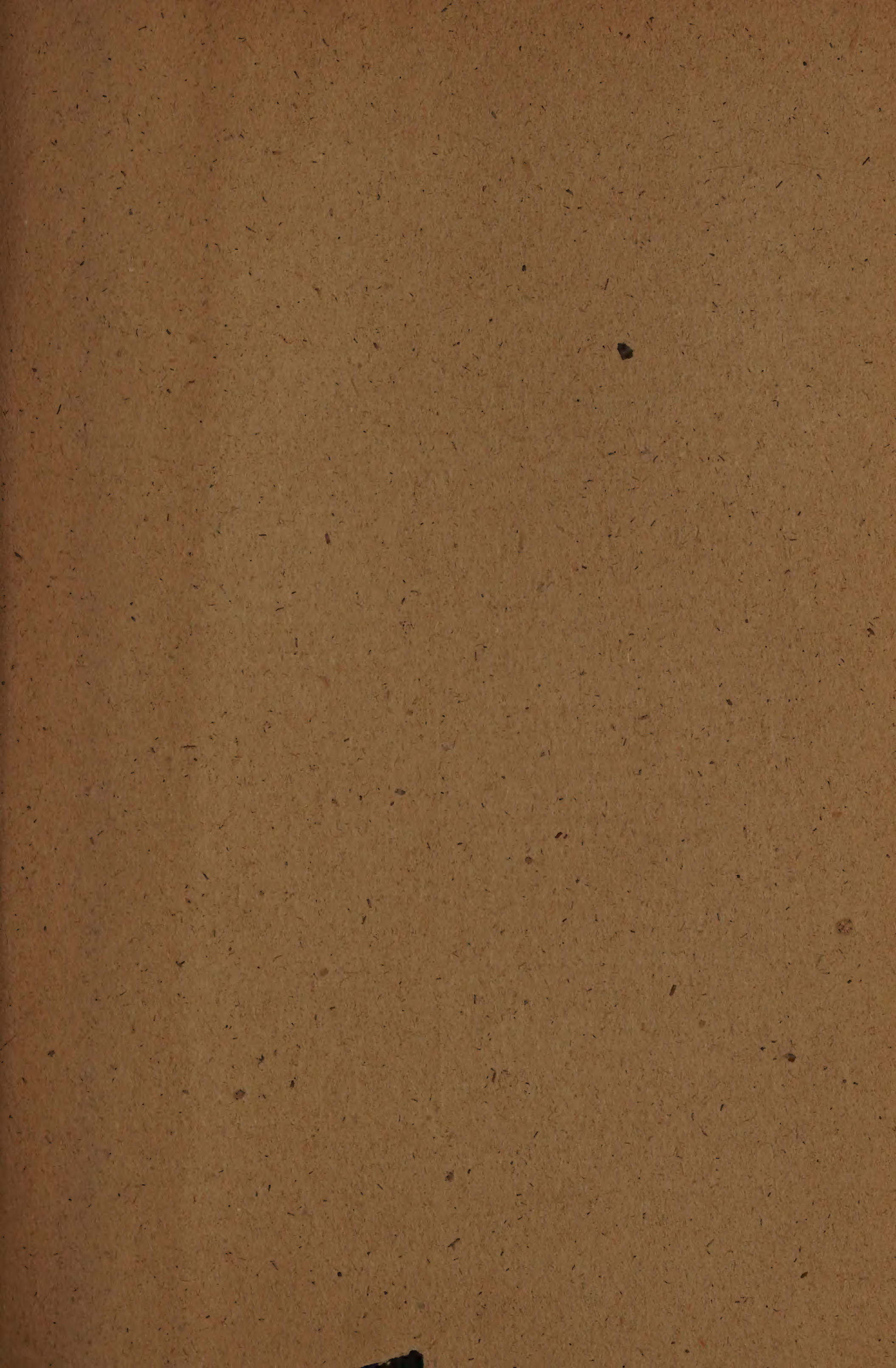
The synthesis of pilocarpine was effected by the same method.

Laboratory for the Investigation and Synthesis of Vegetable and Animal Substances. Moscow.

ОТ РЕДАКЦИИ

К тексту прений по докладу акад. В. Ф. Миткевича «О „физическом“ действии на расстоянии», помещенному в № 10 ИМЕН 1933 г., следует добавить заключительные слова докладчика (стр. 1409, после выступления Д. Д. Иваненко):

В. Ф. Миткевич (акад.). Из выступления Д. Д. Иваненко совершенно определенно вытекает, что на сформулированный мною принципиальный вопрос он отвечает «да».



Оглавление — Sommaire

Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала

Le titre marqué d'un astérisque est une traduction du titre original

Цена 3 руб. 50 коп.